

Fußbälle, platonische und archimedische Körper

Prof. Dr. Wolfram Koepf

<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf>

Was ist ein Fußball?

- Sepp Herberger: Der Ball ist rund.
- Ist also ein Fußball eine Kugel?
- Ein Fußball sieht so aus:

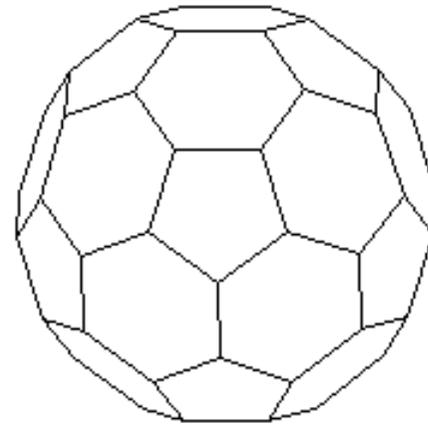


oder so ...



Ein Fußball als Polyeder

- Durch näheres Betrachten sehen wir die folgende Oberflächenstruktur:



Einen solchen Körper nennt man einen Polyeder.

Aus wie vielen Fünf- und Sechsecken besteht ein Fußball?

- Durch Abzählen stellen wir fest, dass ein Fußball
- 12 Fünfecke und
- 20 Sechsecke
- besitzt, und zwar grenzen an jedes schwarze Fünfeck 5 Sechsecke und an jedes weiße Sechseck 3 Fünfecke an.



Wie viele Ecken hat ein Fußball?

- Das ist schon sehr mühselig zu zählen. Daher rechnen wir:
- Jede Ecke hängt an einem Fünfeck und keine zwei Fünfecke haben eine Ecke gemeinsam. Also ist die Anzahl E der Ecken gleich der fünffachen Anzahl der Fünfecke:

$$E = 5 \cdot 12 = 60$$

Flächen und Kanten des Fußballs

- Die Anzahl der Flächen ist klar: 12 Fünfecke und 20 Sechsecke ergeben $F = 32$.
- Jedes Fünfeck hat 5 Kanten. Dies ergibt insgesamt $5 \cdot 12 = 60$ Kanten.
- Jedes Sechseck hat 6 Kanten. Also kommen noch $6 \cdot 20 = 120$ Kanten hinzu.
- Bei dieser Zählung wurde jede Kante doppelt gezählt. Also hat der Fußball $K = 90$ Kanten.

Eulerscher Polyedersatz

- Der Eulersche Polyedersatz besagt, dass in jedem einfachen Polyeder die Formel

$$E - K + F = 2$$

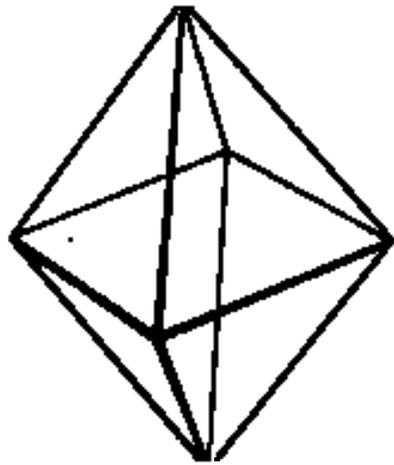
gilt, wobei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen bezeichnet.

- Für den Fußball gilt tatsächlich

$$E - K + F = 60 - 90 + 32 = 2 .$$

Andere Beispiele

- Würfel: $E - K + F = 8 - 12 + 6 = 2$
- Tetraeder: $E - K + F = 4 - 6 + 4 = 2$



$$E - K + F = 6 - 12 + 8 = 2$$

Beweis des Eulerschen Polyedersatzes

- Man transformiert das Problem in die Ebene. Hierzu **entfernen** wir genau eine Fläche aus unserem Polyeder.
- Dann **verbiegen** wir das Polyeder so, dass es eben wird.
- Die resultierende ebene Konfiguration hat eine Fläche weniger, aber gleich viele Ecken und Kanten, also sollte gelten: $E - K + F = 1$.

Polyedersatz für ebene Netze

- Behauptung: Für jedes ebene Netz gilt

$$E - K + F = 1.$$

- Zum Beweis dieser Formel beginnt man mit dem denkbar einfachsten Netz, das aus **einer einzigen Ecke** besteht. Für dieses Netz gilt die Formel:

$$E - K + F = 1 - 0 + 0 = 1.$$

Beweisschritt 2

- Nun überlegt man sich, was passiert, wenn man **eine neue Kante hinzufügt**. Man muss zwei Fälle unterscheiden:
- 1. Fall: Zwei bereits vorhandene Ecken werden miteinander verbunden.
- Dadurch entsteht aber neben der zusätzlichen Kante auch eine neue Fläche. Die Netzformel bleibt also richtig, weil eine neue Fläche die neue Kante ausgleicht.

Beweisschritt 3

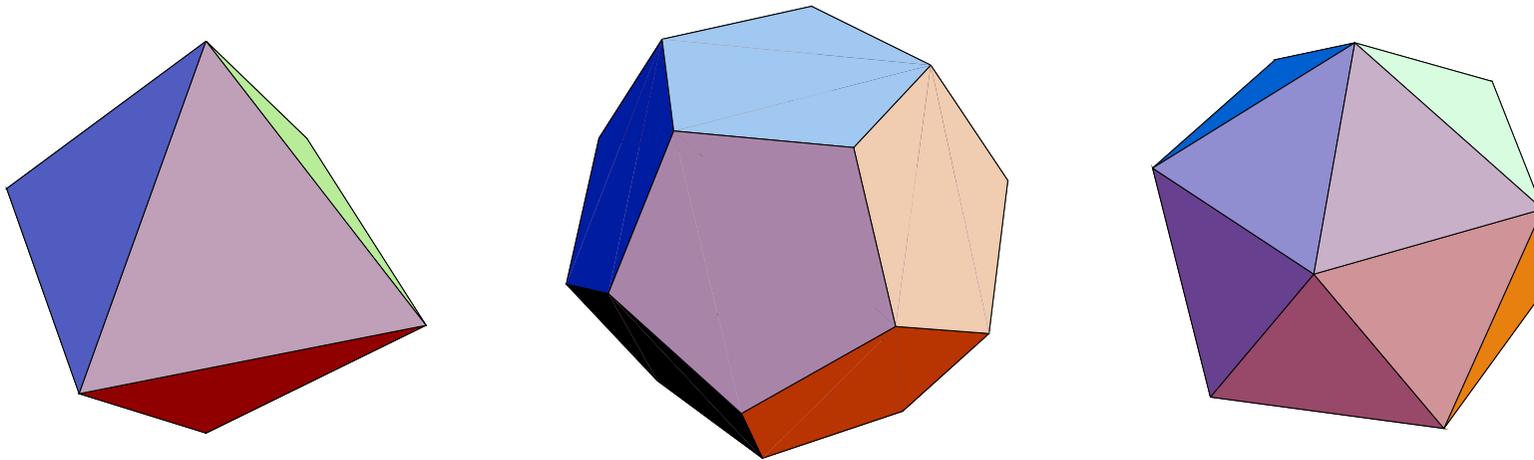
- 2. Fall: Eine bereits vorhandene Ecke wird durch eine neue Kante mit einer neuen Ecke verbunden:
- Wiederum bleibt der Polyedersatz gültig, weil diesmal die neue Ecke die neue Kante ausgleicht und dabei keine neuen Flächen entstehen.

Platonische und archimedische Körper

- Ein konvexes Polyeder wird platonisch genannt, wenn alle Flächen **regelmäßige n -Ecke** sind.
- Der Fußball ist offenbar kein platonischer Körper, denn er besitzt ja Fünf- und Sechsecke als Flächen.
- Polyeder, welche aus mehreren Sorten regelmäßiger Vielecke bestehen, heißen archimedische Körper.
- Der Fußball ist ein archimedischer Körper.

Die fünf platonischen Körper

- Wir wollen nun zeigen, dass es nur 5 platonische Körper gibt: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.



Beweisschritt 1

- Mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes kann man beweisen, dass es nur diese 5 platonischen Körper gibt. Dazu nimmt man an, ein platonischer Körper habe F Flächen, deren jede ein regelmäßiges n -Eck ist, und an jeder Ecke treffen r Kanten zusammen.
- F = Anzahl der Flächen
- n = Anzahl der Ecken einer Fläche
- r = Anzahl der Kanten, die an einer Ecke des Körpers zusammentreffen.

Beweisschritt 2

- Da jede der F Flächen n Kanten besitzt, gilt

$$n \cdot F = 2K ,$$

weil jede Kante zu zwei Flächen gehört und daher im Produkt $n \cdot F$ doppelt gezählt wird.

- Da jede der E Ecken r Kanten produziert, gilt

$$r \cdot E = 2K ,$$

weil jede Kante zu zwei Ecken gehört.

Beweisschritt 3

- Löst man nun diese Gleichungen nach F bzw. E auf und setzt dies in den Eulerschen Polyedersatz ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2K}{r} - K + \frac{2K}{n} = 2.$$

Beweisschritt 4

Nach Division durch $2K$ erhalten wir dann

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K}.$$

Nebenbedingungen :

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{N}, r \geq 3.$$

Beweisschritt 5

- Wären sowohl n als auch r größer als 3, so wäre die linke Seite dieser Gleichung kleiner als $\frac{1}{2}$. Das geht aber wegen $K > 0$ nicht.
- Also ist entweder $n = 3$ oder $r = 3$, und wir können eine Fallunterscheidung durchführen.

Beweisschritt 6

- Diese Fallunterscheidung führt auf folgende Fälle:
- $n = 3$ erzeugt die Gleichung

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K},$$

also $r = 3$ oder $r = 4$ oder $r = 5$. Dies liefert Tetraeder, Oktaeder bzw. Ikosaeder.

Beweisschritt 7

- $r = 3$ ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K},$$

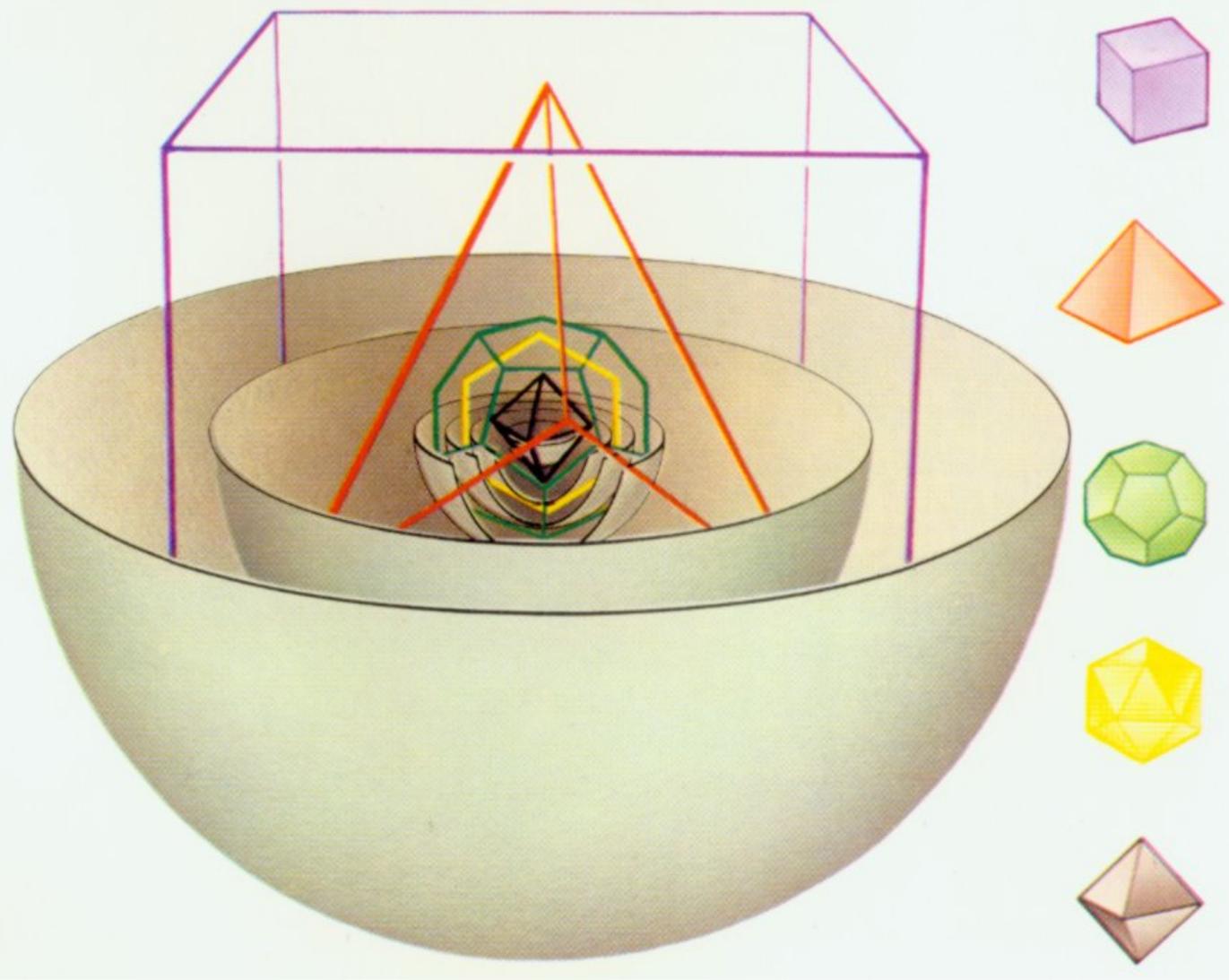
welche $n = 3$ oder $n = 4$ oder $n = 5$ liefert.
Dies ergibt wieder den Tetraeder sowie
den Würfel und den Dodekaeder.

Warum nennen wir diese Körper platonisch?

- **Platon** hat gezeigt, dass sich nur die betrachteten fünf Körper aus regelmäßigen n -Ecken zusammensetzen lassen.
- **Euklid** schreibt und beweist in dem 13. Buch seiner **Elemente**:
 - Weiter behaupte ich, dass sich außer den fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Keplersche Deutung

- Der Astronom Johannes Kepler, welcher die Planetenbewegung erforscht hat, stellte sich vor, dass die damals bekannten 5 Planeten auf Bahnen um die Sonne kreisen, welche durch die 5 platonischen Körper erzeugt werden.



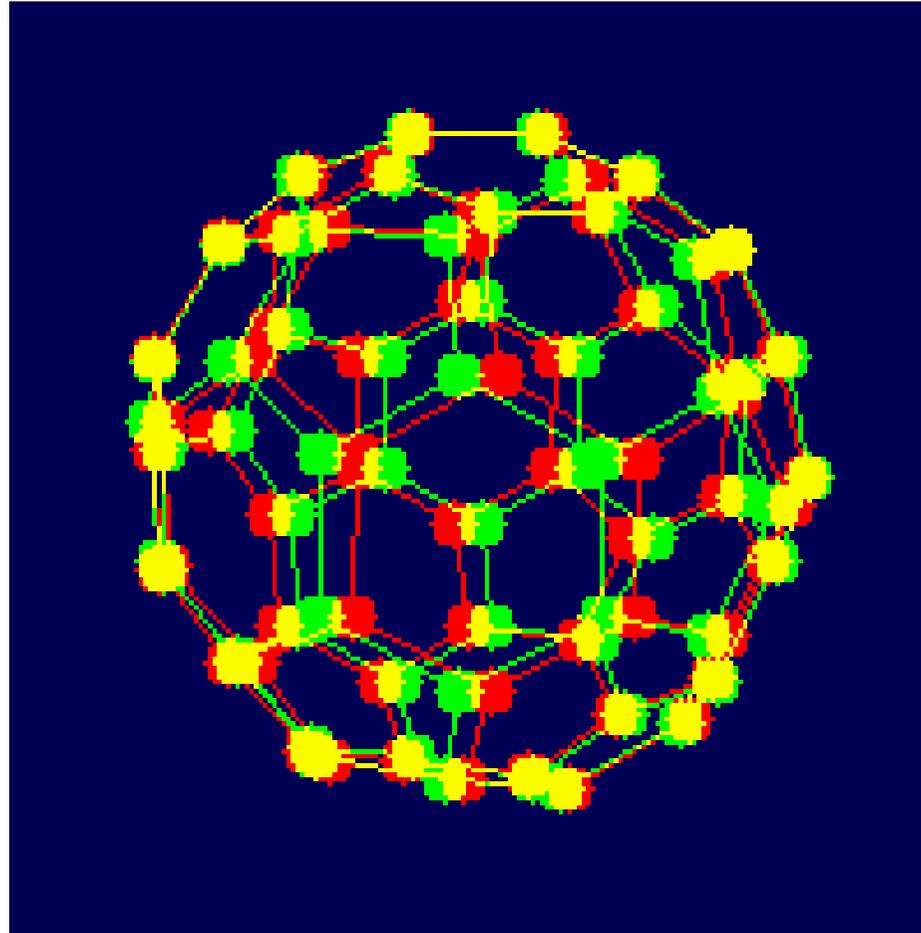
Wie entstehen Archimedische Körper?

- Man kann Archimedische Körper, bei welchen verschiedene n -Ecke erlaubt sind, beispielsweise dadurch erzeugen, dass man
 - (a) platonischen Körpern **Sterne aufsetzt** oder
 - (b) platonische Körper **an ihren Ecken absägt**.
- Der Fußball entsteht durch Absägen des Ikosaeders und ist daher ein **Ikosaederstumpf**.
- **Animation**

Wo kommt der Ikosaederstumpf noch vor?

- Der Fußball steckt auch in dem Kohlenstoffmolekül C_{60} , welches von dem Architekten Buckminster Fuller entdeckt wurde und das daher als **Fulleren** bezeichnet wird.
- Im Fulleren-Molekül hat jedes Kohlenstoffatom drei Nachbarn, mit zweien ist es $1\frac{1}{2}$ -fach verbunden (wie im Benzol) und mit dem jeweils dritten einfach (wie in Alkanen).

Fulleren-Gerüst



Wo erhält man weitere Informationen?

- Hat man erst einmal die Idee zu diesem Vortragsthema, so kann man sich vollständig im Internet informieren.
- Genauso habe ich dies gemacht.
- Daher schließt dieser Vortrag mit einer Liste von Internetseiten, welche sich mit Polyedern beschäftigen.

Internetseiten

- Temmel, Alois: RAN – Fußball einmal anders, 2000:
<http://www.gymhe.bl.schule-bw.de/projekte/MT/RAN/RAN.html>
- Norbert Treitz: cliXX: Physik in bewegten Bildern: Fullerene. Harri Deutsch, 2000: http://eddy.uni-duisburg.de/treitz/demo_cd/auto/krist/full/full_m.htm
- Wolfram Research: Klassifikation der Polyeder:
<http://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron.html>
- Schaper, Ralf: Life3D-Beispiele:
<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~rascha/Live3D/U25.html>
- Suchmaschine: <http://www.google.de>