Fußbälle, platonische und archimedische Körper

Prof. Dr. Wolfram Koepf

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

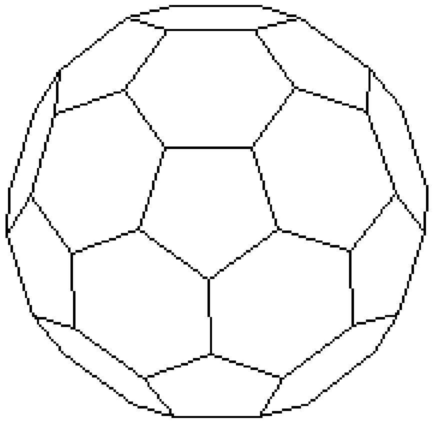
Was ist ein Fußball?

- Sepp Herberger: Der Ball ist rund.
- Ist also ein Fußball eine Kugel?
- Ein Fußball sieht so aus:

oder auch so ...

Ein Fußball als Polyeder

- Durch näheres Betrachten sehen wir die folgende Oberflächenstruktur:



Einen solchen Körper nennt man einen Polyeder.

Aus wie vielen Fünf- und Sechsecken besteht ein Fußball?

- Durch Abzählen stellen wir fest, dass ein Fußball
- 12 Fünfecke und
- 20 Sechsecke

- besitzt, und zwar grenzen an jedes schwarze Fünfeck 5 Sechsecke und an jedes weiße Sechseck 3 Fünfecke an.

Wie viele Ecken hat ein Fußball?

- Das ist schon sehr mühselig zu zählen. Daher rechnen wir:
- Jede Ecke hängt an einem Fünfeck und keine zwei Fünfecke haben eine Ecke gemeinsam. Also ist die Anzahl E der Ecken gleich der fünffachen Anzahl der Fünfecke:

$$E = 5 \cdot 12 = 60$$

Flächen und Kanten des Fußballs

- Die Anzahl der Flächen ist klar: 12 Fünfecke und 20 Sechsecke ergeben $F = 32$.
- Jedes Fünfeck hat 5 Kanten. Dies ergibt insgesamt $5 \cdot 12 = 60$ Kanten.
- Jedes Sechseck hat 6 Kanten. Also kommen noch $6 \cdot 20 = 120$ Kanten hinzu.
- Bei dieser Zählung wurde aber jede Kante doppelt gezählt. Also hat der Fußball $K = 90$ Kanten.

Eulerscher Polyedersatz

- Der Eulersche Polyedersatz besagt, dass in jedem einfachen Polyeder die Formel

$$E - K + F = 2$$

gilt, wobei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen bezeichnet.

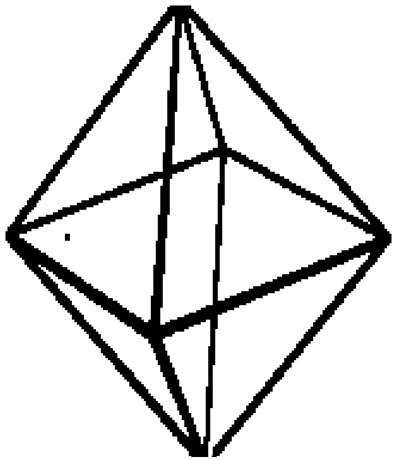
- Für den Fußball gilt tatsächlich

$$E - K + F = 60 - 90 + 32 = 2\ .$$

Leonhard Euler

Andere Beispiele

- Würfel:
- $E - K + F = 8 - 12 + 6 = 2$
- Tetraeder:
- $E - K + F = 4 - 6 + 4 = 2$



$$E - K + F = 6 - 12 + 8 = 2$$

Beweis des Eulerschen Polyedersatzes

- Man transformiert das Problem in die Ebene. Hierzu entfernen wir genau eine Fläche aus unserem Polyeder.
- Dann verbiegen wir das Polyeder so, dass es eben wird.
- Die resultierende ebene Konfiguration hat eine Fläche weniger, aber gleich viele Ecken und Kanten, also sollte gelten: $E - K + F = 1$.

Polyedersatz für ebene Netze

- Behauptung: Für jedes ebene Netz gilt

$$E - K + F = 1.$$

- Zum Beweis dieser Formel beginnt man mit dem denkbar einfachsten Netz, das aus einer einzigen Ecke besteht und keine Kante hat. Für dieses Netz gilt die Formel:

$$E - K + F = 1 - 0 + 0 = 1.$$

Beweisschritt 2

- Nun überlegt man sich, was passiert, wenn man eine neue Kante hinzufügt. Man muss zwei Fälle unterscheiden:
- 1. Fall: Zwei bereits vorhandene Ecken werden miteinander verbunden.
- Dadurch entsteht aber neben der zusätzlichen Kante auch eine neue Fläche. Die Netzformel bleibt also richtig, weil eine neue Fläche die neue Kante ausgleicht.

Beweisschritt 3

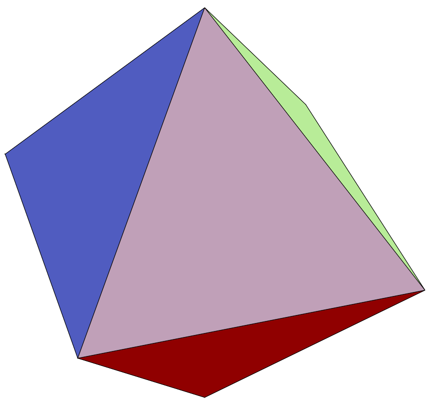
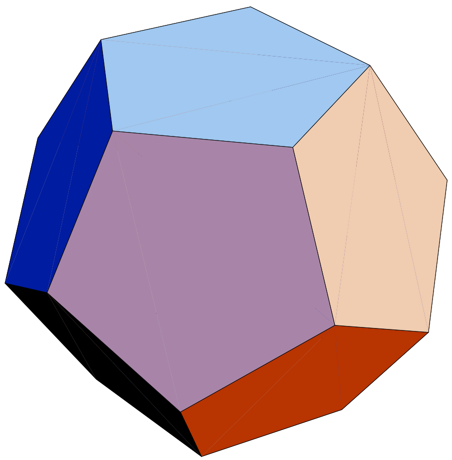
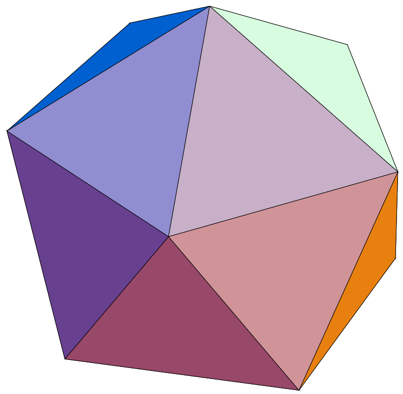
- 2. Fall: Eine bereits vorhandene Ecke wird durch eine neue Kante mit einer neuen Ecke verbunden.
- Wiederum bleibt der Polyedersatz gültig, weil diesmal die neue Ecke die neue Kante ausgleicht und dabei keine neuen Flächen entstehen.

Platonische und archimedische Körper

- Ein konvexes Polyeder wird platonisch genannt, wenn alle Flächen regelmäßige *n*-Ecke sind.
- Der Fußball ist offenbar kein platonischer Körper, denn er besitzt ja Fünf- und Sechsecke als Flächen.
- Polyeder, welche aus mehreren Sorten regelmäßiger Vielecke bestehen, heißen archimedische Körper.
- Der Fußball ist ein archimedischer Körper.

Die fünf platonischen Körper

- Wir wollen nun zeigen, dass es nur 5 platonische Körper gibt: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

Beweisschritt 1

- Mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes kann man beweisen, dass es nur diese 5 platonischen Körper gibt. Dazu nimmt man an, ein platonischer Körper habe F Flächen, deren jede ein regelmäßiges n-Eck ist, und an jeder Ecke treffen r Kanten zusammen.
- F = Anzahl der Flächen
- n = Anzahl der Ecken einer Fläche
- r = Anzahl der Kanten, die an einer Ecke des Körpers zusammentreffen.

Beweisschritt 2

- Da jede der F Flächen n Kanten besitzt, gilt
$$n \cdot F = 2K\ ,$$
weil jede Kante zu zwei Flächen gehört und daher im Produkt $n{\cdot}F$ doppelt gezählt wird.
- Da jede der E Ecken r Kanten produziert, gilt
$$r \cdot E = 2K\ ,$$
weil jede Kante zu zwei Ecken gehört.

Beweisschritt 3

- Löst man nun diese Gleichungen nach F bzw. E auf und setzt dies in den Eulerschen Polyedersatz ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{K}\,.$$

Nebenbedingungen :

$$n\in\mathbb{N},\ n\geq 3\quad \text{und}\quad r\in\mathbb{N}, r\geq 3\,.$$

Beweisschritt 4

- Wären sowohl n als auch r größer als 3, so wäre die linke Seite dieser Gleichung kleiner gleich ½. Das geht aber wegen $K > 0$ nicht.
- Also ist entweder $n = 3$ oder $r = 3$, und wir können eine Fallunterscheidung durchführen.

Beweisschritt 5

- Diese Fallunterscheidung führt auf folgende Fälle:
- $n = 3$ erzeugt die Gleichung

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K},$$

also $r = 3$ oder $r = 4$ oder $r = 5$. Dies liefert Tetraeder, Oktaeder bzw. Ikosaeder.

Beweisschritt 6

- $r = 3$ ergibt die Gleichung

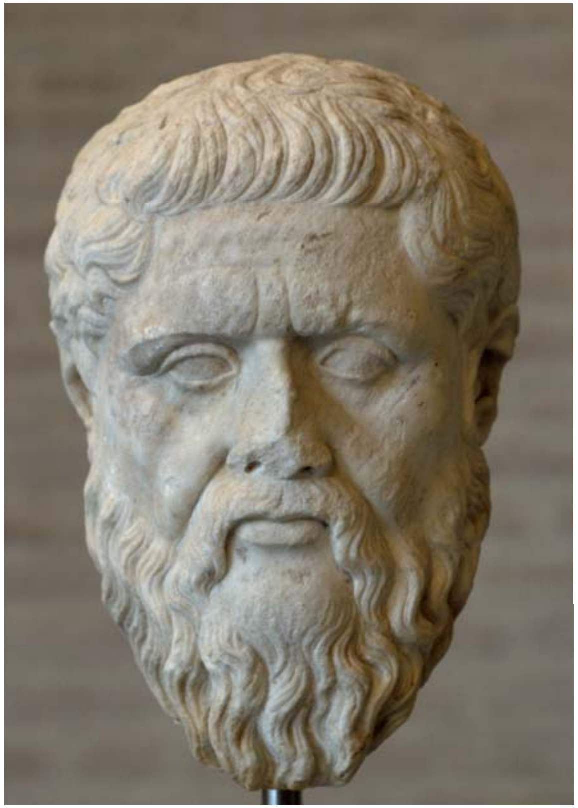
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K},$$

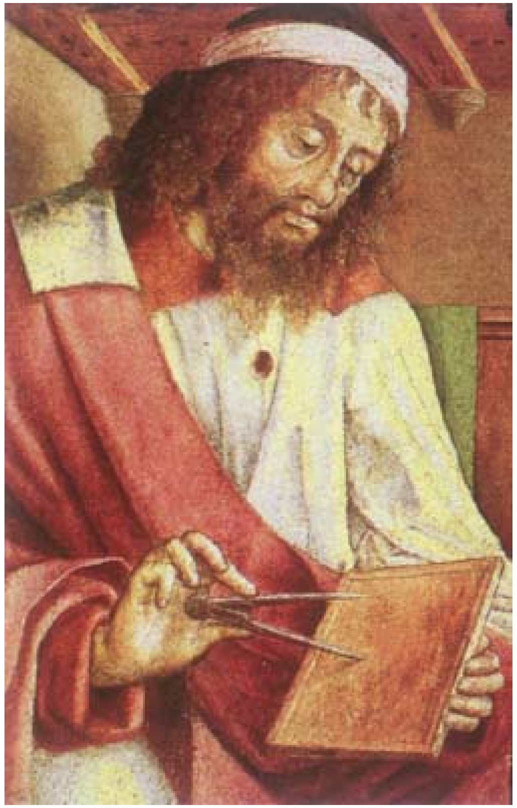
welche $n = 3$ oder $n = 4$ oder $n = 5$ liefert. Dies ergibt wieder den Tetraeder sowie den Würfel und den Dodekaeder.

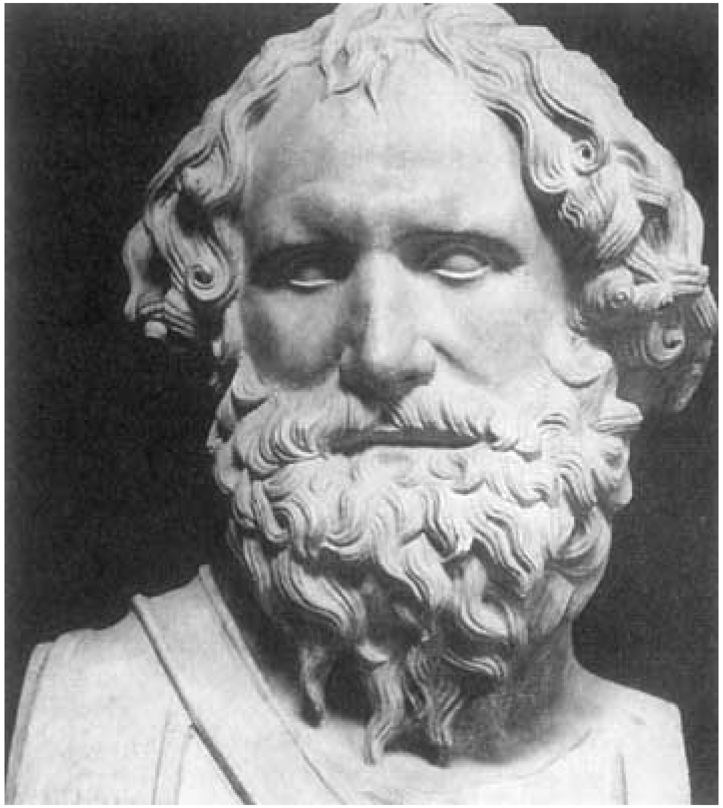
Warum nennen wir diese Körper platonisch?

- Platon hat bereits vor 2.500 Jahren gezeigt, dass sich nur die betrachteten fünf Körper aus regelmäßigen *n*-Ecken zusammensetzen lassen.
- Euklid schreibt und beweist in dem 13. Buch seiner Elemente:
  - Weiter behaupte ich, dass sich außer den fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Platon, Euklid und Archimedes

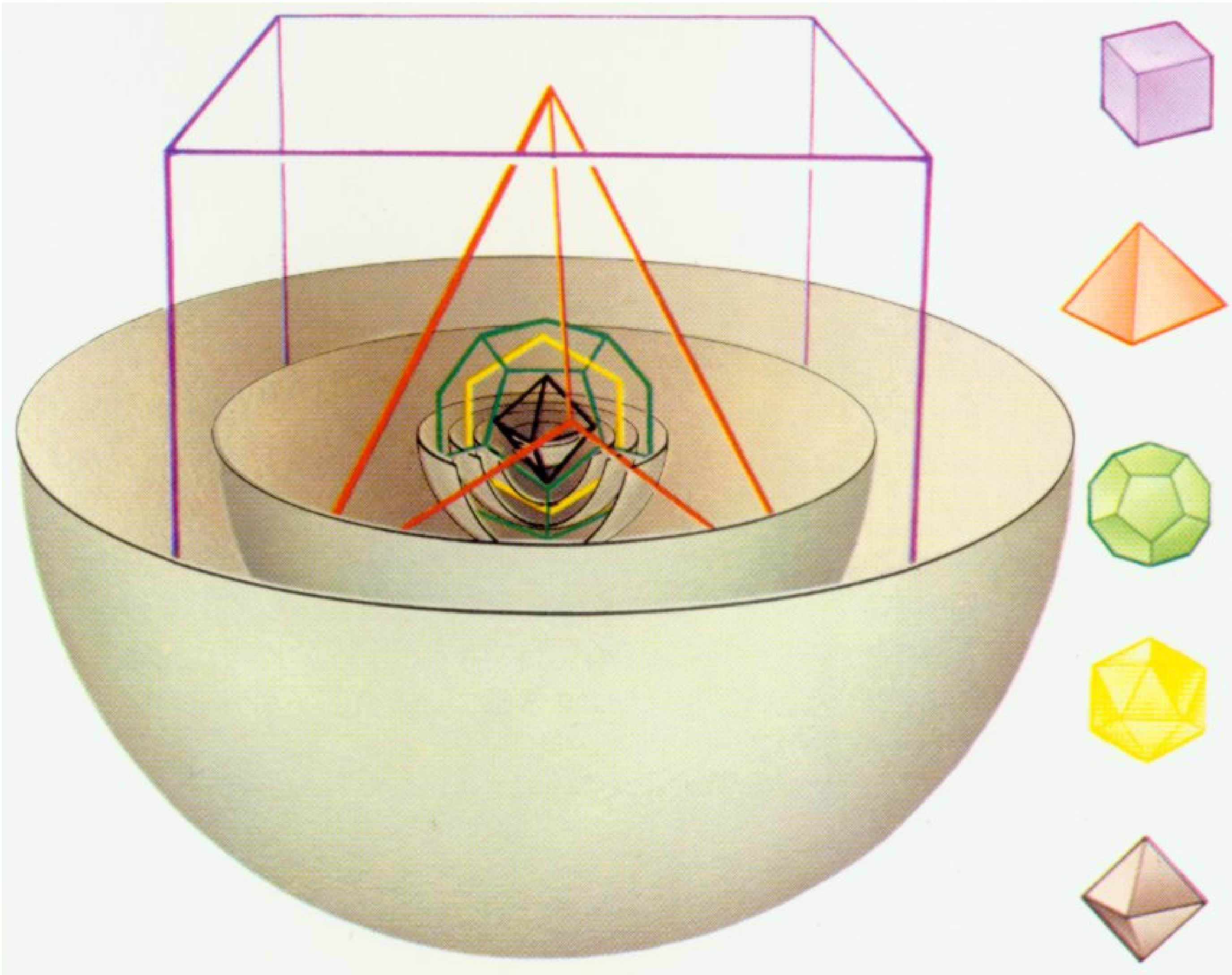






Keplersche Deutung

- Der Astronom Johannes Kepler, welcher die Planetenbewegung erforscht hat, stellte sich um 1600 vor, dass die damals bekannten 5 Planeten auf Bahnen um die Sonne kreisen, welche durch die 5 platonischen Körper erzeugt werden.



Johannes Kepler

Wie entstehen Archimedische Körper?

- Man kann Archimedische Körper, bei welchen verschiedene *n*-Ecke erlaubt sind, beispielsweise dadurch erzeugen, dass man

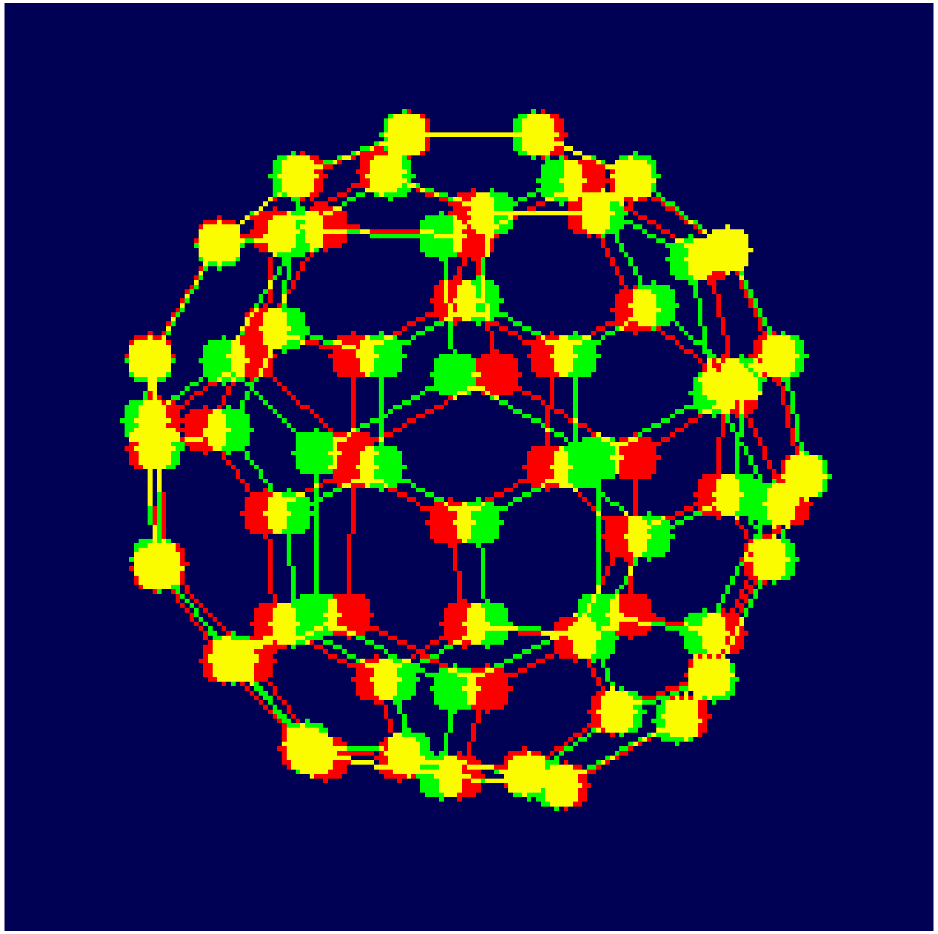
  (a) platonischen Körpern Sterne aufsetzt oder

  (b) platonische Körper an ihren Ecken absägt.
- Der Fußball entsteht durch Absägen des Ikosaeders und ist daher ein Ikosaederstumpf.
- Animation, drehender Ball

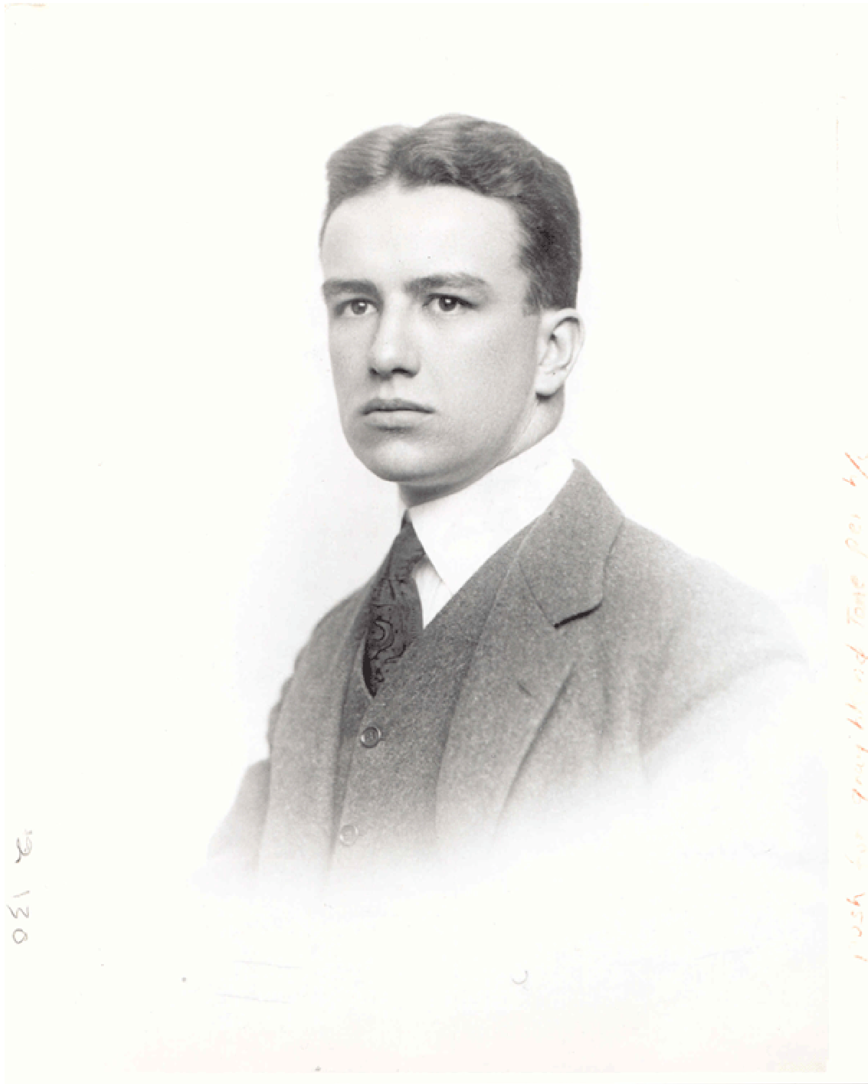
Wo kommt der Ikosaederstumpf noch vor?

- Der Fußball steckt auch in dem Kohlenstoff-molekül C_{60}, welches im Jahr 1985 von dem Architekten Buckminster Fuller entdeckt wurde und das daher als Fulleren bezeichnet wird.
- Im Fulleren-Molekül hat jedes Kohlenstoffatom drei Nachbarn, mit zweien ist es 1½-fach verbunden (wie im Benzol) und mit dem jeweils dritten einfach (wie in Alkanen).

Fulleren-Gerüst



Richard Buckminster Fuller



Wo erhält man weitere Informationen?

- Hat man erst einmal die Idee zu diesem Vortragsthema, so kann man sich ziemlich gut im Internet informieren.
- Genauso habe ich dies gemacht.
- Daher schließt dieser Vortrag mit einer Liste von Internetseiten, welche sich mit Polyedern beschäftigen.

Internetseiten

- Temmel, Alois: RAN – Fußball einmal anders, 2000: http://www.gymhe.bl.schule-bw.de/projekte/MT/RAN/RAN.html
- Norbert Treitz: cliXX: Physik in bewegten Bildern: Fullerene. Harri Deutsch, 2000: http://eddy.uni-duisburg.de/treitz/demo_cd/auto/krist/full/full_m.htm
- Wolfram Research: Klassifikation der Polyeder: http://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron.html
- Schaper, Ralf: Life3D-Beispiele: http://www.mathematik.uni-kassel.de/~rascha/Live3D/U25.html