Miniaturen zur Einführung in die Mathematik

Vertiefungen, Ergänzungen und zusätzliche interessante Aspekte für Hörsaalanleitungen oder schlicht als Lektüreangebot 2019

Projektionen und Drehungen

Geometrische Bedeutung linearer und affiner Abbildungen

Robert Labus, Universität Kassel, 2019
Stand 17. März 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Die Darstellung und Beschreibung von dreidimensionalen Objekten durch zweidimensionale Graphiken ist in verschiedenen Bereichen der Ingenieurwissenschaften ein übliche Methode. Dabei werden aus Grundriss, Seitenriss, Kreuzriss und Aufriss eine Normalprojektion oder Dreitafelprojektion erstellt. Das Verfahren besteht darin einen Quader zu betrachten, in dessen Inneren sich das Objekt befindet. Diese Situation wird in einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschrieben, um die Methoden der analytischen Geometrie anwenden zu können. Wird das Objekt jetzt jeweils senkrecht auf eine der Seiten des Quaders projiziert, dann entstehen die genannten Risse. Mathematisch handelt es sich dabei um orthogonale Projektionen auf die Ebenen durch die Seiten des Quaders (Seitenebenen). Das Koordinatensystem läßt sich stets so wählen, dass die Seitenebenen parallel zu Koordinatenebenen (durch zwei verschiedene Koordinatenachsen erzeugte Ebenen) liegen. Da gegenüberliegende Seiten eines Quaders parallel sind, können nicht alle Seitenebenen den Nullpunkt enthalten, egal wie das Koordinatensystem gelegt wird.
Dieser Umstand ist insofern bedeutsam, da Ebenen durch den Nullpunkt lineare Unterräume sind und die Projektionen in diesem Fall lineare Abbildungen sind. Ebenen, die den Nullpunkt nicht enthalten, können als verschobene lineare Unterräume sogenannte affine Unterräume angesehen werden. Die Projektionen sind dann ebenfalls nicht mehr linear und gehören zu den affinen Abbildungen.

Bei komplizierten Objekten kommen durch die Normalprojektion eventuell nicht alle Eigenschaften zum Vorschein. Daher ist es oft sinnvoll zusätzlich das Objekt zu drehen und bei festgehaltenem Quader erneut zu projizieren. Mathematisch ist dieser Vorgang äquivalent zu einer Drehung des Quaders bei festgehaltenem Objekt. Die Seitenebenen sind dann nicht mehr parallel zu Koordinatenebenen. Für die mathematische Beschreibung solcher Projektionen benötigen wir daher auch Drehungen bzw. Projektionen auf beliebige Ebenen.

Es gibt andere Anwendungen, bei denen zum Beispiel die Lage eines Objekts bezogen auf eine bestimmte Achse oder Rotationsachse wichtig ist. In solchen Fällen sind Projektionen auf Geraden von Bedeutung. Daneben gibt es auch noch weniger leicht anschaulich zu beschreibende Problemstellungen, in denen die Projektionen auf lineare Unterräume oder verschobene Unterräume Bestandteil von Lösungstechniken sind.

1.1 Projektionen auf Ebenen und Geraden

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Projektionen des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ auf Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$. Solche Projektionen sind Abbildungen des Typs $\underline{P}: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Bilder $\underline{P}(\underline{x})$ dieser Abbildungen liegen sämtlich in der Ebene oder Geraden, auf die projiziert wird. Elemente, die schon in der Ebene oder auf der Geraden liegen, werden auf sich selbst abgebildet. Das bedeutet, dass die zweimalige Anwendung einer Projektion stets das gleiche Ergebnis liefert wie die einmalige Anwendung.

$$\forall \ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\underline{P} \circ \underline{P})(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{x}) \qquad \text{bzw. kurz} \qquad \underline{P} \circ \underline{P} = \underline{P} \qquad (*)$$

Die Eigenschaft $(*)$ ist somit charakteristisch für alle Projektionen.

Für Projektionen auf eine Ebene geben wir eine Projektionsrichtung $\underline{s}$ vor mit der Forderung $\underline{P}(\underline{x}) - \underline{x} \ || \ \underline{s}$.
Für Projektionen auf eine Gerade geben wir wir eine Richtung $\underline{n}$ vor, die orthogonal zur Differenz von Bildvektor und Urbildvektor sein soll; d.h. $\underline{P}(\underline{x}) - \underline{x} \perp \underline{n}$.

Die so definierten Abbildungen sind im Fall von Geraden bzw. Ebenen, die den Nullpunkt enthalten und damit Untervektorräume sind, lineare Abbildungen.

1.1.1 Projektion auf eine Ebene

Gegeben sei eine Ebene $E: \quad <\underline{n}, \underline{x}> = \varrho$ des $\mathbb{R}^3$. Der Vektor $\underline{n}$ sei ein auf die Länge Eins normierter Normalenvektor von E.
Ferner sei $\underline{s}$ ein beliebiger Einheitsvektor, der die Projektionsrichtung angibt und nicht parallel zur Ebene ist. Damit gilt:
$\underline{s} \nparallel E \Leftrightarrow \underline{s} \not\perp \underline{n} \Leftrightarrow \langle \underline{n}, \underline{s} \rangle \neq 0$

Unter diesen Voraussetzungen schneidet die Gerade durch einen beliebigen Punkt X mit dem Richtungsvektor $\underline{s}$ die Ebene E in genau einem Punkt X_s.
Wir bezeichnen die Ortsvektoren der Punkte X und X_s mit $\underline{x}$ und $\underline{x}_s$.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \underline{P}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & \underline{P}(\underline{x}) = \underline{x}_s \end{array}$$

heißt Projektion auf die Ebene E in Richtung $\underline{s}$.
Gilt $\underline{s} = \underline{n}$ oder $\underline{s} = -\underline{n}$, dann sprechen wir von einer orthogonalen Projektion auf die Ebene E.

Liegt der Punkt X schon in der Ebene E, dann stimmt X_s mit X überein. Insbesondere gilt also

$$\underline{P}(\underline{x}_s) = \underline{x}_s \, .$$

Daraus folgt für die zweimalige Anwendung der Projektion $\underline{P}$:

$$(*) \qquad \underline{P} \circ \underline{P} = \underline{P} \qquad \text{bzw.} \qquad (\underline{P} \circ \underline{P})(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{x}) \quad \text{für alle} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

denn $\quad (\underline{P} \circ \underline{P})(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{P}(\underline{x})) = \underline{P}(\underline{x}_s) = \underline{x}_s = \underline{P}(\underline{x})$ $\square$

Abbildungen mit der Eigenschaft $(*)$ werden idempotent genannt.

Zur Einstimmung betrachten wir als erstes die

Orthogonale Projektion auf eine Ebene durch den Nullpunkt

Im Fall der orthogonalen Projektion wird ein Punkt X auf seinen Lotfußpunkt X^* in der Ebene $E: \quad <\underline{n}, \underline{x}> = 0$ abgebildet. Dessen Berechnung schon aus der analytischen Geometrie (Mathematik I) bekannt ist. Für die Ortsvektoren gilt unter der Bedingung $\|\underline{n}\| = 1$:

$$\underline{x}^* = \underline{x} - \frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{n}>}\, \underline{n} = \underline{x} - <\underline{n}, \underline{x}>\, \underline{n}$$

Das heißt es gilt der

Satz 1.1. *Orthogonale Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum*
Es seien $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\underline{n}\| = 1$ und die Ebene $E: <\underline{n}, \underline{x}> = 0$ gegeben.

Die orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene E ist durch

$$\begin{aligned} \underline{P}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \underline{P}(\underline{x}) = \underline{x} - <\underline{n}, \underline{x}>\, \underline{n} \end{aligned}$$

gegeben.

Satz 1.2. *Matrix der orthogonalen Projektion*
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 gilt:
Die Projektion $\underline{P}$ ist eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{A}}_P = (-1) \begin{bmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Beweis:

Nachweis der Linearität: Für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{x} + \lambda \underline{y}) &= \underline{x} + \lambda \underline{y} - <\underline{n}, \underline{x} + \lambda \underline{y}>\, \underline{n} \\ &= \underline{x} + \lambda \underline{y} - [<\underline{n}, \underline{x}> - \lambda <\underline{n}, \underline{y}>]\, \underline{n} \\ &= \underline{x} - <\underline{n}, \underline{x}>\, \underline{n} + \lambda \underline{y} - \lambda <\underline{n}, \underline{y}>\, \underline{n} \\ &= \underline{x} - <\underline{n}, \underline{x}>\, \underline{n} + \lambda [\underline{y} - <\underline{n}, \underline{y}>] \\ &= \underline{P}(\underline{x}) + \lambda \underline{P}(\underline{y}) \end{aligned}$$

Damit ist die Linearität nachgewiesen und daher existiert auch eine Abbildungsmatrix.
Die Spalten sind die Bilder der Koordinateneinheitsvektoren:

$$\underline{P}\,(\underline{e}_i) = \underline{e}_i - <\underline{n}, \underline{e}_i> \underline{n} = \underline{e}_i - n_i\, \underline{n}, \qquad i = 1;2;3$$

d.h.

$$\underline{P}\,(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 - n_1\, \underline{n} = \begin{bmatrix} 1 - n_1^2 \\ -n_1 n_2 \\ -n_1 n_3 \end{bmatrix} \quad \underline{P}\,(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} -n_1 n_2 \\ 1 - n_2^2 \\ -n_2 n_3 \end{bmatrix} \quad \underline{P}\,(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} -n_1 n_3 \\ -n_2 n_3 \\ 1 - n_3^2 \end{bmatrix}$$

□

Projektion auf eine Ebene durch den Nullpunkt

Wir untersuchen jetzt Projektionen in einer Richtung $\underline{s}$, die nicht notwendigerweise orthogonal zur Ebene ist. Normalenformen für Ebenen durch den Nullpunkt haben die Gestalt

$$E: \quad <\underline{n}, \underline{x}> = 0 \tag{1.1}$$

Für die Normalenvektoren $\underline{n}$ und die Projektionsrichtung $\underline{s}$ setzen wir im Folgenden stets die Länge 1 voraus.

$$\left\|\underline{n}\right\| = 1, \quad \left\|\underline{s}\right\| = 1$$

Von dem Punkt X setzen wir für die folgenden Überlegungen voraus, dass er nicht zur Ebene E gehört. Die Gleichung (1.1) ist unter den Voraussetzungen eine Hessesche Normalenform und der Abstand $\operatorname{dist}(X;E)$ des Punktes X von seinem Lotfußpunkt X^* in der Ebene E ist durch

$$d_0 := \left\|\overrightarrow{XX^*}\right\| = \operatorname{dist}(X;X^*) = \operatorname{dist}(X;E) = |<\underline{n}, \underline{x}>| \tag{1.2}$$

gegeben. Da das Lot $\overrightarrow{XX^*}$ senkrecht auf der Ebene steht, gilt

$$\overrightarrow{XX^*} \,||\, \underline{n}\,. \tag{1.3}$$

Wir berechnen jetzt den Abstand d_s des Punktes X zu seiner Projektion X_s.

$$d_s := \left\|\overrightarrow{XX_s}\right\| = \operatorname{dist}(X;X_s)$$

Da die Projektionsrichtung $\underline{s}$ ist, gilt

$$\overrightarrow{XX_s} \,||\, \underline{s}\,. \tag{1.4}$$

.

Wir betrachten nun das Dreieck $\triangle_{X\,X^*\,X_s}$ mit der Winkelbezeichnung $\alpha := \sphericalangle\left(\overrightarrow{XX^*}, \overrightarrow{XX_s}\right)$.

Dieses Dreieck ist rechtwinklig, da $\overrightarrow{XX^*}$ das Lot von X auf die Ebene ist und die Seite, die X^* und X_s verbindet, in der Ebene liegt.

Für den Winkel α ist somit $\overline{X\,X^*}$ die Ankathete mit der Länge d_0 und $\overline{X\,X_s}$ die Hypotenuse mit der Länge d_s . Somit gilt

$$\cos\alpha = \frac{d_0}{d_s} > 0 \quad \text{bzw.} \quad d_s = \frac{d_0}{\cos\alpha} \tag{1.5}$$

Aus (1.3) und (1.4) folgt für den Winkel $\delta := \sphericalangle(\underline{n}, \underline{s})$, dass δ gleich α oder ein Nebenwinkel von α ist, d.h. es gilt $\delta = \alpha$ oder $\delta = \pi - \alpha$.
Wegen $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ folgt daraus

$$|<\underline{n}, \underline{s}>| = \underbrace{\|\underline{n}\|}_{=1}\,\underbrace{\|\underline{s}\|}_{=1}\,|\cos\delta| = \cos\alpha\,.$$

Für d_s folgt daher aus (1.2) und (1.5)

$$d_s = \frac{d_0}{\cos\alpha} = \frac{|<\underline{n}, \underline{x}>|}{|<\underline{n}, \underline{s}>|} = \left|\frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>}\right|$$

Mit dem Wert von d_s können wir jetzt den Vektor $\underline{x}_s$ berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s &= \underline{x} + \overrightarrow{XX_s} = \underline{x} + \frac{d_s}{d_s}\,\overrightarrow{XX_s} \\ &= \underline{x} + d_s\,\frac{1}{\left\|\overrightarrow{XX_s}\right\|}\,\overrightarrow{XX_s} \\ &= \underline{x} - \frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>}\,\underline{s} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Fallunterscheidung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{XX_s}\right\|}\,\overrightarrow{XX_s} &= \underline{s} &\qquad\qquad \Rightarrow \frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} &\le 0 \\ \frac{1}{\left\|\overrightarrow{XX_s}\right\|}\,\overrightarrow{XX_s} &= -\underline{s} &\qquad\qquad \Rightarrow \frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} &\ge 0\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Projektion P_s

$$\underline{P}(\underline{x}) = \underline{x} - \frac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>}\,\underline{s}$$

Diese Gleichung gilt auch wenn $\underline{x}$ die Ebenengleichung $<\underline{n}, \underline{x}> = 0$ erfüllt, da sich dann korrekterweise $\underline{P}(\underline{x}) = \underline{x}$ ergibt.

Wir haben damit den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen.

Satz 1.3. *Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum*
Es seien $\underline{n}, \underline{s} \in \mathbb{R}^3$ *mit* $\|\underline{n}\| = 1$, $\|\underline{s}\| = 1$ *und die Ebene* $E: \; <\underline{n}, \underline{x}> = 0$ *gegeben.*

(1) Die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene E in Richtung $\underline{s}$ ist durch

$$\begin{array}{rccl} \underline{P}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & \underline{P}(\underline{x}) = \underline{x} - \dfrac{<\underline{n}, \underline{x}>}{<\underline{n}, \underline{s}>}\,\underline{s} \end{array}$$

gegeben.

(2) Die Projektion $\underline{P}$ ist eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{A}}_P = -\frac{1}{<\underline{n}, \underline{s}>} \begin{bmatrix} n_1 s_1 - <\underline{n}, \underline{s}> & n_2 s_1 & n_3 s_1 \\ n_1 s_2 & n_2 s_2 - <\underline{n}, \underline{s}> & n_3 s_2 \\ n_1 s_3 & n_2 s_3 & n_3 s_3 - <\underline{n}, \underline{s}> \end{bmatrix}$$

Beweis:

Den Teil (1) haben wir schon bewiesen. Der Beweis zum Teil (2) läßt sich analog zum Beweis von Satz 1.2 führen. □

Beispiel 1.4
Gegeben sei die Ebene $E: \; x + 2y - 2z = 0$ und der Punkt $X_0 = (1, 1, 1)$ mit dem Ortsvektor $\underline{x}_0$.
Zu bestimmen ist

(a) die orthogonale Projektion $\underline{P}_0$ auf die Ebene E und das Bild $\underline{P}_0(\underline{x}_0)$ von $\underline{x}_0$,

(b) die Projektion $\underline{P}_1$ auf E in Richtung $\underline{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\underline{P}_1(\underline{x}_0)$.

zu (a): Aus der Ebenengleichung läßt sich ablesen, dass der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ normal zur Ebene E ist. Damit erhalten wir den normierten Normalenvektor

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nach Satz 1.2 erhalten wir die Projektionsmatrix

$$(-1) \begin{bmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1-9 & 2 & -2 \\ 2 & 2^2 - 9 & 2(-2) \\ -2 & 2(-2) & (-2)^2 - 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir die Abbildung

$$\underline{P}_0(\underline{x}) = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8x-2y+2z \\ -2x+5y+4z \\ 2x+4y+5z \end{bmatrix}$$

Für das Bild von $\underline{x}_0$ gilt

$$\underline{P}_0(\underline{x}_0) = \underline{P}_0\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8-2+2 \\ -2+5+4 \\ 2+4+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

zu (b): Nach Satz 1.3 erhalten wir die Abbildung

$$\underline{P}_1(\underline{x}) = \underline{x} - \frac{<\underline{n},\underline{x}>}{<\underline{n},\underline{s}>}\underline{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{3}(x+2y-2z)}{\frac{1}{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x+2y-2z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y+2z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

An der Stelle $\underline{x}_0$ erhalten wir:

$$\underline{P}_1(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projektion auf eine beliebige Ebene

Wir untersuchen jetzt Projektionen Q auf eine Ebene E, die nicht notwendigerweise den Nullpunkt enthält.

$$E: \quad <\underline{n}, \underline{x}-\underline{a}> = 0 \tag{1.6}$$

Dabei ist $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ beliebig und für die Normalenvektoren $\underline{n}$ und die Projektionsrichtung $\underline{s}$ setzen wir wieder die Länge 1 voraus.

$$||\underline{n}|| = 1, \quad ||\underline{s}|| = 1$$

Mit der Parallelverschiebung $\underline{y} = \underline{V}(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{a}$ wird aus (1.6) die Gleichung

$$E: \quad <\underline{n}, \underline{V}(\underline{x})> = 0$$

bzw.

$$\widetilde{E}: \quad <\underline{n}, \underline{y}> = 0 \tag{1.7}$$

Bei $\widetilde{E}$ handelt es sich um eine Ebene, die den Nullpunkt enthält.
Um die Projektion eines Punktes X auf die Ebene E zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Projektion von $\widetilde{\underline{x}} = \underline{V}(\underline{x})$ auf $\widetilde{E}$ mit der Abbildung aus Satz 1.3:

$$\underline{P}(\widetilde{\underline{x}}) = \widetilde{\underline{x}} - \frac{<\underline{n}, \widetilde{\underline{x}}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} \underline{s}$$

Durch Anwendung der Umkehrabbildung $\underline{V}^{-1}$ der Verschiebung $\underline{V}$ erhalten wir dann die Projektion $\underline{Q}$ von $\underline{x}$ auf die Ebene E.

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{V}^{-1}\big(\underline{P}(\widetilde{\underline{x}})\big) = \underline{V}^{-1}\big(\underline{P}(\underline{x} - \underline{a})\big) = \underline{P}(\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a} \tag{1.8}$$

Die Projektion $\underline{Q}$ ist im Gegensatz zu $\underline{P}$ nicht linear, wenn die Ebene E kein Unterraum ist (d.h. den Nullpunkt nicht enthält).
Zum Beweis zeigen wir, dass in diesem Fall $\underline{Q}(\underline{0}) \neq \underline{0} gilt$.
Wegen der Linearität von $\underline{P}$ folgt aus (1.8)

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{x}) - \underline{P}(\underline{a}) + \underline{a} \tag{1.9}$$

und damit

$$\underline{Q}(\underline{0}) = \underline{P}(\underline{0}) - \underline{P}(\underline{a}) + \underline{a} = \underline{a} - \underline{P}(\underline{a})$$

Aus $\underline{a} \in E$ und $\underline{P}(\underline{a}) \in \widetilde{E}$ folgt, $\underline{a} - \underline{P}(\underline{a}) \neq \underline{0}$ da die Ebenen E und $\widetilde{E}$ für $\underline{0} \notin E$ parallel und nicht identisch sind.
Für die Abbildung $\underline{Q} = \underline{V}^{-1} \circ \underline{P} \circ \underline{V}$ erhalten wir aus (1.8) den Funktionsterm

$$\begin{aligned}
\underline{Q}(x) &= \big(\underline{V}^{-1} \circ \underline{P} \circ \underline{V}\big)(\underline{x}) \\
&= \underline{P}(\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a} \\
&= \underline{x} - \underline{a} - \frac{<\underline{n}, \underline{x} - \underline{a}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} \underline{s} + \underline{a} \\
&= \underline{x} - \frac{<\underline{n}, \underline{x} - \underline{a}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} \underline{s}
\end{aligned}$$

Wir fassen das Ergebnis mit einem Satz zusammen.

Satz 1.5. *Projektion auf eine beliebige Ebene*
Es seien $\underline{n}, \underline{s} \in \mathbb{R}^3$ *mit* $\|\underline{n}\| = 1$, $\|\underline{s}\| = 1$ *und die Ebene* $E: \quad <\underline{n}, \underline{x} - \underline{a}> = 0$ *gegeben.*

(1) Die Projektion des $\mathbb{R}^3$ *auf die Ebene* E *in Richtung* $\underline{s}$ *ist durch*

$$\begin{aligned}
\underline{Q}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
x &\longmapsto \underline{Q}(\underline{x}) = \underline{x} - \frac{<\underline{n}, \underline{x} - \underline{a}>}{<\underline{n}, \underline{s}>} \underline{s}
\end{aligned}$$

gegeben.

(2) *Die Projektion* $\underline{Q}$ *ist genau dann linear, wenn* $\underline{0} \in E$ *gilt.*
Für $\underline{0} \in E$ *stimmt* $\underline{Q}$ *mit* $\underline{P}$ *aus Satz 1.3 überein.*

Beweis:

Es bleibt nur noch Teil (2) zu beweisen.
Für $\underline{0} \in E$ sind die Ebenen E und $\widetilde{E}$ identisch. Damit wird $\underline{a}$ durch $\underline{P}$ auf sich selbst abgebildet, d.h. $\underline{P}(\underline{a}) = \underline{a}$.
Aus (1.9) erhalten wir damit

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{x}) - \underline{P}(\underline{a}) + \underline{a} = \underline{P}(\underline{x}) - \underline{a} + \underline{a} = \underline{P}(\underline{x})$$

Damit stimmt $\underline{Q}$ für $\underline{0} \in E$ mit $\underline{P}$ überein und ist nach Satz 1.3 linear.
Das $\underline{Q}$ sonst nichtlinear ist, haben wir bereits gezeigt. $\square$

Beispiel 1.6

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ soll in Richtung der ersten Koordinatenachse auf die Ebene E projiziert werden

mit $\quad E: \quad \left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad .$

Für die bekannten Größen aus Satz 1.5 gilt:

$$\underline{n} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\underline{Q}(\underline{x}_0) &= \underline{x}_0 - \frac{<\underline{n}, \underline{x}_0 - \underline{a}>}{<\underline{n}, \underline{s}>}\,\underline{s} \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle}{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\frac{-2-2-0}{3}}{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

1.1.2 Projektion auf eine Gerade

Gegeben sei eine Gerade $g: \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{s}$ im $\mathbb{R}^3$ mit einem Einheitsvektor als Richtungsvektor $\underline{s}$.

Die direkte Vorgabe einer festen Richtung für die Projektion auf g ist nicht möglich, denn für unendlich viele Punkte haben die Geraden durch diese Punkte mit einem festen Richtungsvektor keinen gemeinsamen Punkt mit g. Deshalb definieren wir diese Projektionen mithilfe eines Einheitsvektors $\underline{n}$, der nicht senkrecht auf der Geraden g steht. Unter diesen Voraussetzungen hat die Ebene durch einen beliebigen Punkt X mit dem Vektor $\underline{n}$ als Normalenvektor genau einen Schnittpunkt X^* mit der Geraden g. X^* bezeichnen wir als Projektion von X auf die Gerade g senkrecht zur Richtung $\underline{n}$. Für die Projektionsabbildungen $\underline{P}$ verwenden wir die entsprechenden Ortsvektoren, d.h. $\underline{P}(\underline{x}) = \underline{x}^*$.

Sind $\underline{n}$ und $\underline{s}$ kollinear, dann handelt es sich um eine orthogonale Projektion. Außerdem werden wir zeigen, dass die Projektionen auf g lineare Abbildungen sind, wenn die Gerade g ein Unterraum ist (d.h. $\underline{a} = \underline{0}$).

Als Einstieg in die detaillierte Betrachtung verwenden wir die

Orthogonale Projektion auf eine Gerade durch den Nullpunkt.

Gegeben sei die Gerade $g: \quad \underline{x} = \lambda \underline{s}$ bzw. $g = \text{Span}\{\underline{s}\}$ mit $\left\|\underline{s}\right\| = 1$.
Die orthogonale Projektion erhalten wir als Projektion senkrecht zu $\underline{n} = \underline{s}$. Andererseits ist die gesuchte Projektion eines Punktes genau der entsprechende Lotfußpunkt auf der Geraden g. Damit erhalten wir

$$\underline{P}(\underline{x}) = \langle \underline{s}, \underline{x} \rangle\, \underline{s}$$

Diese Abbildung ist linear mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} s_1 \underline{s} & s_2 \underline{s} & s_3 \underline{s} \end{bmatrix} .$$

Projektion senkrecht zur Richtung $\underline{n}$ auf eine Gerade durch den Nullpunkt.

Sind $\underline{n}, \underline{s}$ Einheitsvektoren mit $\underline{n} \not\perp \underline{s}$, dann ist die Projektion $\underline{P}$ senkrecht zu $\underline{n}$ auf die Gerade $g = \text{Span}\{\underline{s}\}$ durch

$$\underline{P}(\underline{x}) = \frac{\langle \underline{n}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle}\, \underline{s}$$

gegeben.
Die Abbildung ist linear mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle} \begin{bmatrix} n_1 \underline{s} & n_2 \underline{s} & n_3 \underline{s} \end{bmatrix} .$$

Projektion senkrecht zur Richtung $\underline{n}$ auf eine beliebige Gerade.

Gegeben sei die Gerade $g: \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{s}$ In diesem Fall nutzen wir wieder die umkehrbare Verschiebungsabbildung $\underline{V}$ mit $\underline{V}(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{a}$.

$$\begin{aligned} \underline{Q}(\underline{x}) &= \left(\underline{V}^{-1} \circ \underline{P} \circ \underline{V}\right)(\underline{x}) \\ &= \underline{V}^{-1}\left(\underline{P}(\underline{x} - \underline{a})\right) \\ &= \underline{V}^{-1}\left(\frac{\langle \underline{n}, \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle}\, \underline{s}\right) \\ &= \frac{\langle \underline{n}, \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle}\, \underline{s} + \underline{a} \end{aligned}$$

Beispiel 1.7

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ soll senkrecht zur Richtung $\underline{n} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ auf die Gerade

$$g: \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

projiziert werden.

Wir normieren zunächst den Richtungsvektor der Geraden g zu $\underline{s} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ und erhalten für beliebiges $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{Q}}(\underline{x}) &= \frac{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Für $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned}
\underline{Q}(\underline{x}_0) &= \frac{1}{4} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse zur Projektion auf Geraden mit einem Satz zusammen.

Satz 1.8. *Projektion auf eine Gerade*
Es seien $\underline{n}, \underline{s}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\left\|\underline{n}\right\| = 1$, $\left\|\underline{s}\right\| = 1$ und $\underline{n} \not\perp \underline{s}$. Für die Projektion $\underline{Q}$ senkrecht zur Richtung $\underline{n}$ auf die Gerade $g: \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{s}$ gilt:

(1)

$$\begin{aligned} \underline{Q}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \underline{Q}(\underline{x}) = \frac{\langle \underline{n}, \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle} \underline{s} + \underline{a} \end{aligned}$$

gegeben.

(2) Die Projektion $\underline{Q}$ ist genau dann linear, wenn g ein Unterraum ist, d.h. wenn $\underline{0} \in g$ gilt.
Für $\underline{0} \in g$ hat $\underline{Q}$ die Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\langle \underline{n}, \underline{s} \rangle} \begin{bmatrix} n_1 \underline{s} & n_2 \underline{s} & n_3 \underline{s} \end{bmatrix}.$$

(3) Die orthogonale Projektion ergibt sich für $\underline{n} = \underline{s}$.

1.2 Affine Unterräume und affine Abbildungen

In den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ sind die eindimensionalen Unterräume Geraden und die zweidimensionalen Unterräume Ebenen. Auf diese Weise werden aber nicht alle Geraden und Ebenen erfasst. Wird ein eindimensionaler Unterraum mit einem Vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ parallelverschoben, so ergibt sich wieder eine Gerade. Entsprechend verhält es sich mit Ebenen. Dieses Problem wird durch die affinen Unterräume gelöst, die im Wesentlichen durch Verschiebungen (Translationen) der normalen Unterräume entstehen.

Definition 1.9. *Affine Unterräume*
Als affine Unterräume eines Vektorraums V bezeichnen wir die leere Menge und alle Teilmengen A der Form $A = \underline{a} + U := \{\underline{a} + \underline{u} |\, u \in U\}$ für ein $\underline{a} \in V$ und einen Untervektorraum U von V.

Zwei nichtleere affine Unterräume $A_1 = \underline{a}_1 + U_1$ und $A_2 = \underline{a}_2 + U_2$ sind gleich, wenn $U_1 = U_2$ und $\underline{a}_2 - \underline{a}_1 \in U_1$ gilt.
Daher können wir die Dimension eines affinen Unterraums als die Dimension des eindeutig bestimmten Untervektorraums U festlegen.

Definition 1.10. *Dimension affiner Unterräume*
Besitzt ein affiner Unterraum A von V die Darstellung $A = \underline{a} + U$ mit einem Untervektorraum U von V, dann definieren wir

$$\dim A := \dim U$$

Für den leeren affinen Unterraum legen wir $\dim \emptyset = -1$ fest.

Jetzt können wir kurz und knapp die Geraden und Ebenen in der Sprache der analytischen Geometrie charakterisieren:

Satz 1.11. *Charakterisierung von Geraden und Ebenen*
Im $\mathbb{R}^n$ sind die Geraden genau die eindimensionalen affinen Unterräume und die Ebenen sind genau die zweidimensionalen affinen Unterräume.

Definition 1.12. *affine Abbildung zwischen Vektorräumen*
Eine Abbildung $\underline{g} : V \to W$ bezeichnen wir als affin, wenn es ein $\underline{a} \in W$ gibt mit
$\underline{f}(\underline{x}) := \underline{g}(\underline{x}) - \underline{a}$ *ist linear.*

Das bedeutet, dass sich jede affine Abbildung $\underline{g}$ in der Form : $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{f}(\underline{x})$ mit einer linearen Abbildung $\underline{f}$ darstellen lässt.
Das Bild einer affinen Abbildung ist stets ein affiner Unterraum des Zielraums.

Anmerkung:
Wir haben hier die Begriffe der affinen Geometrie nur soweit vorgestellt, wie sie in diesem Text benötigt werden. Es sei hier nur erwähnt, dass neben affinen Unterräumen eines Vektorraums kann auch der Begriff des affinen Raums eingeführt werden kann. Affine Abbildungen können dann auch zwischen affinen Räumen betrachtet werden.

Alle Projektionen aus Abschnitt 1.1 sind Projektionen auf affine Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Sie sind jeweils affine Abbildungen, die im Fall der Projektion auf einen linearen Unterraum linear sind.

1.3 Drehungen

Weitere wichtige Beispiele für lineare Abbildungen sind die Drehungen. Wir betrachten hier zunächst Drehungen im zweidimensionalen Raum um den Ursprung und dann Drehungen des dreidimensionalen Raums um Drehachsen durch den Ursprung. Mit der Verschiebetechnik aus dem Abschnitt über Projektionen erhalten wir dann die Verallgemeinerung auf Drehungen um beliebige Punkte bzw. Drehachsen als affine Abbildungen.

Drehungen im $\mathbb{R}^2$

Die Drehung mit dem Winkel φ um den Nullpunkt in mathematisch positivem Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) ist eine lineare Abbildung $\underline{f}: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{\underline{D}}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

das heißt

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}}_\varphi \, \underline{x} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Für die Drehung $\underline{g}$ um einen beliebigen Punkt A mit dem Ortsvektor $\underline{a}$ ergibt sich dann mit der Verschiebung $\underline{V}: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \underline{x} \mapsto \ \underline{V}(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{a}$:

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{x}) &= \left(\underline{V}^{-1} \circ \underline{f} \circ \underline{V}\right)(\underline{x}) \\ &= \underline{V}^{-1}\left(\underline{f}(\underline{x} - \underline{a})\right) \\ &= \begin{bmatrix} (x - a_1)\cos\varphi - (y - a_2)\sin\varphi \\ (x - a_1)\sin\varphi + (y - a_2)\cos\varphi \end{bmatrix} + \underline{a} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + (x - a_1)\cos\varphi - (y - a_2)\sin\varphi \\ a_2 + (x - a_1)\sin\varphi + (y - a_2)\cos\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Für Drehungen um die i–te Koordinatenachse mit dem Winkel φ erhalten wir die folgenden Drehmatrizen $\underline{\underline{D}}_{i,\varphi}$.

$$\underline{\underline{D}}_{1,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{D}}_{2,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{D}}_{3,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir betrachten jetzt Drehungen um beliebige Achsen durch den Nullpunkt. Da wir Drehungen um die Koordinatenachsen bereits beschrieben haben, setzen wir jetzt voraus, dass die Drehachse Span$\{\underline{a}\}$ nicht

mit einer Koordinatenachse übereinstimmt. Das bedeutet, dass der Einheitsvektor $\underline{a}$ kein Vielfaches von einem Koordinateneinheitsvektor ist.
Die Idee ist es, die Drehachse zunächst durch eine Kombination von Drehungen um Koordinatenachsen auf die erste Koordinatenachse zu drehen und dann die Drehung auszuführen. Anschließend werden dann die inversen Drehungen ausgeführt.
Um die Winkel für die Drehung von $\underline{a}$ auf den ersten Koordinateneinheitsvektor zu bestimmen, verwenden wir die Darstellung von $\underline{a}$ mittels Kugelkoordinaten. Da $\underline{a}$ zu keiner Koordinatenachse gehört, sind die Winkel ψ, ϑ in der Darstellung

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta \\ \sin\psi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \psi \in [0; 2\pi),\ \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

eindeutig bestimmt.
Die lineare Abbildung für die Drehung $\underline{f}$ um die Drehachse $g = \operatorname{Span}\{\underline{a}\}$ mit dem Drehwinkel φ erhalten wir jetzt durch

$$\underline{f} = \left(\underline{f}_{2,-\vartheta} \circ \underline{f}_{3,-\psi}\right)^{-1} \circ \underline{f}_{1,\varphi} \circ \left(\underline{f}_{2,-\vartheta} \circ \underline{f}_{3,-\psi}\right) = \left(\underline{f}_{3,\psi} \circ \underline{f}_{2,\vartheta}\right) \circ \underline{f}_{1,\varphi} \circ \left(\underline{f}_{2,-\vartheta} \circ \underline{f}_{3,-\psi}\right)$$

mit der Abbildungsmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{\,f} &= \underline{\underline{D}}_{3,\psi} \cdot \underline{\underline{D}}_{2,\vartheta} \cdot \underline{\underline{D}}_{1,\varphi} \cdot \underline{\underline{D}}_{2,-\vartheta} \cdot \underline{\underline{D}}_{3,-\psi} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Für die Drehung um eine beliebige Drehachse g mit der Gleichung $g:\ \underline{x} = \underline{b} + \lambda\underline{a}$ bzw. $g = \underline{b} + \operatorname{Span}\{\underline{a}\}$ erhalten wir mit der Verschiebetechnik die im allgemeinen nichtlineare (aber stets affine) Abbildung

$$\underline{h}(\underline{x}) = \left(\underline{V}^{-1} \circ \underline{f} \circ \underline{V}\right)(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a}$$

Beispiel 1.13
Wir bestimmen die affine Abbildung $\underline{h}$ zur Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Drehachse

$$g:\ \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\underline{b}} + \lambda \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{=\underline{a}} \quad \text{mit dem Drehwinkel } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Dazu berechnen wir zuerst die lineare Abbildung $\underline{f}$ zur Drehung um $\operatorname{Span}\{\underline{a}\}$.

Die Bestimmung der Winkel ψ, ϑ erfolgt über die Gleichung

$$\underline{a} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta \\ \sin\psi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \psi \in [0; 2\pi),\ \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Damit erhalten wir $\sin\vartheta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\Rightarrow\; \vartheta = \dfrac{\pi}{4}$

und $\cos\psi \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos\psi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \psi = \dfrac{\pi}{4}$

Für die Abbildungsmatrix von $\underline{f}$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}_f &= \underline{\underline{D}}_{3,\psi} \cdot \underline{\underline{D}}_{2,\vartheta} \cdot \underline{\underline{D}}_{1,\varphi} \cdot \underline{\underline{D}}_{2,-\vartheta} \cdot \underline{\underline{D}}_{3,-\psi} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1-2\sqrt{2} & \sqrt{2}+2 \\ 1+2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Für die gesuchte Drehung $\underline{h}$ folgt damit

$$
\begin{aligned}
\underline{h}(\underline{x}) &= \underline{\underline{A}}_f(\underline{x}-\underline{b})+\underline{b}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1-2\sqrt{2} & \sqrt{2}+2\\ 1+2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1-2\sqrt{2} & \sqrt{2}+2\\ 1+2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x+(1-2\sqrt{2})y+(\sqrt{2}+2)z\\ (1+2\sqrt{2})x+y+(\sqrt{2}-2)z\\ (\sqrt{2}-2)x+(\sqrt{2}+2)y+2z\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x+(1-2\sqrt{2})y+(\sqrt{2}+2)z\\ (1+2\sqrt{2})x+y+(\sqrt{2}-2)z\\ (\sqrt{2}-2)x+(\sqrt{2}+2)y+2z\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ -2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x+(1-2\sqrt{2})y+(\sqrt{2}+2)z-2-\sqrt{2}\\ (1+2\sqrt{2})x+y+(\sqrt{2}-2)z+2-\sqrt{2}\\ (\sqrt{2}-2)x+(\sqrt{2}+2)y+2z+2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$