Miniaturen zur Einführung in die Mathematik

Vertiefungen, Ergänzungen und zusätzliche interessante Aspekte für Hörsaalanleitungen oder schlicht als Lektüreangebot 2019

Lineare Differentialgleichungen

mit konstanten Koeffizienten

Robert Labus, Universität Kassel, 2019
Stand 17. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 1

1.1 Lineare Differentialoperatoren . . . 1

1.2 Lösungstheorie für den homogenen Fall . . . 2

1.2.1 Eigenwerte und zugehörige Basislösungen . . . 4

1.2.2 Wronski-Determinante . . . 7

1.2.3 Anfangswertprobleme (AWP) . . . 8

1.3 Inhomogene Gleichungen . . . 9

1.3.1 Variation der Konstanten für Gleichungen der Ordnung 2 . . . 9

1.3.2 Variation der Konstanten für Gleichungen höherer Ordnung . . . 11

1.3.3 Ansatzmethode für spezielle Störfunktionen . . . 12

Kapitel 1

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1.1 Lineare Differentialoperatoren

Definition

Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1; \dots ; n$ mit $a_n \neq 0$, dann wird die Abbildung L, die jede auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ erklärte, n-mal stetig reell differenzierbare reell- oder komplexwertige Funktionen y auf $L[y]$ mit

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}$$

abbildet, als linearer Differentialoperator der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten bezeichnet.

Ist g eine Funktion $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ als Definitionsbereich, dann heißt

$$L[y] = g$$

eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten.

Ist $g(x) \equiv 0$, dann heißt die DGL homogen, sonst inhomogen. Im Fall einer inhomogenen DGL wird die Funktion g auch als Inhomogenität oder Störfunktion bezeichnet.

Als Lösungen der Differentialgleichung bezeichen wir Funktionen y, die wenigstens auf einem Teilintervall J des Definitionsbereichs I von g erklärt sind ($J \subseteq I$) und die DGL erfüllen.

Bemerkung

(i) Für die Abbildung L verwenden wir hier eckige Klammern $L[\ .\ ]$ statt der sonst üblichen runden Klammern. Der Grund dafür liegt an dem Bildbereich dieser Abbildung, er besteht selbst wieder aus

Funktionen.
$L[y]$ ist eine Funktion mit dem Funktionsterm $L[y](x)$.
Ist y eine Lösung der DGL, dann ist der Funktionsterm von $L[y]$ gleich $g(x)$, also

$$L[y](x) = g(x)$$

(ii) Es mag vielleicht verwundern, dass wir für die gesuchten Funktionen y auch komplexwertige Funktionen zulassen, für die Inhomogenität jedoch nicht. Wir werden noch sehen, dass es durchaus auch komplexwertige Funktionen geben kann, die von L auf eine reellwertige Funktion abbgebildet werden.

Wir werden im Folgenden zunächst die Lösungstheorie für die homogenen Differentialgleichungen entwickeln. Danach untersuchen wir die Struktur der Lösungen der inhomogenen Gleichung. Diese Untersuchung wird uns zeigen, dass zur Angabe der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung nur noch die Kenntnis einer einzigen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung benötigt wird. Im Anschluss werden wir daher verschiedene Methoden vorstellen, mit denen wenigstens eine Lösung berechnet werden kann.

1.2 Lösungstheorie für den homogenen Fall

Wir versuchen zunächst mit dem Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Lösungen aufzufinden. Für die Ableitungen gilt dann

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \dots .$$

kurz

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} \quad k \in \mathbb{N}$$

Damit ergibt sich

$$L[y](x) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right)}_{:=P(\lambda)} e^{\lambda x}$$

und es gilt

$$L[y](x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\lambda) = 0$$

<u>Definition</u>

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

wird als charakteristisches Polynom zum Differentialoperator L bezeichnet.
Die Nullstellen heißen Eigenwerte von L.

Bemerkung

Jede der hier betrachteten Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung läßt sich unter Verwendung einer Matrix auch als ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Das charakteristische Polynom und die Eigenwerte dieser Matrix stimmen jeweils mit den soeben definierten gleichnamigen Begriffen für Differentialoperatoren überein.

Für den folgenden Satz erinnern wir zunächst noch einmal an zwei Rechenoperationen für Funktionen.

Ist $c \in \mathbb{R}$ und sind f und g reell- oder komplexwertige Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich $J \subseteq \mathbb{R}$, dann sind die Funktionen

(1) $f + g$ durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

(2) cf durch $(cf)(x) := c \cdot f(x)$

auf J erklärt.

Satz

Alle Lösungen von $L[y] = 0$ haben $\mathbb{R}$ als maximalen Definitionsbereich und bilden mit den Verknüpfungen (1) und (2) einen reellen Vektorraum, den Lösungsraum $\mathcal{L}$

Beweis

Den Beweis, das alle Lösungen $\mathbb{R}$ als maximalen Definitionsbereich haben, lassen wir hier weg und werden ihn später nachholen,

Für die Vektorraumeigenschaft beschränken wir uns darauf zu zeigen, dass die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar wohldefiniert sind.

Der Nullvektor ist die konstante Funktion $\mathcal{O}$ mit $\mathcal{O}(x) \equiv 0$.

Zu zeigen ist, dass

$$y_1, y_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \in \mathcal{L} \tag{1.1}$$

$$c \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad cy \in \mathcal{L} \tag{1.2}$$

zu(1) $y_1, y_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow L[y_1] = 0$ und $L[y_2] = 0 \Rightarrow L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in \mathcal{L}$

zu(2) $c \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{L} \Rightarrow L[y] = 0 \Rightarrow L[cy] = cL[y] = 0 \Rightarrow cy \in \mathcal{L}$

Bemerkung

Der letzte Satz ist vielleicht etwas überraschend und gewöhnungsbedürftig. Bisher haben Sie hauptsächlich Vektorräume kennengelernt, deren Elemente einspaltige Matrizen mit reellen oder komplexen Komponenten waren. In dem Lösungsraum sind die 'Vektoren' jedoch Funktionen. Sie genügen aber genau den gleichen Rechengesetzen für Vektorräume wie die Ihnen bekannten Vektoren und Vektorräume.

Definition und Satz
Eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$ wird Fundamentalsystem zum Differentialoperator L genannt.
Eine solche Basis existiert immer und hat für Differentialoperatoren der Ordnung n genau n Basisfunktionen.
Die Dimension des Lösungsraums ist damit n.

Wir haben schon zu Beginn dieses Abschnitts gesehen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen Eigenwerten und Lösungen der homogenen Gleichung gibt.
Wir geben im Folgenden vier Regeln an, wie den Eigenwerten spezielle Lösungen zugeordnet werden können, die dann zusammen eine Basis bilden. Daher nennen wir diese Lösungen auch den Eigenwerten zugehörige Basislösungen. Wegen dieses Zusammenhangs mit Fundamentalsystemen nennen nummerieren wir diese Regel mit FS1 bis FS4.

1.2.1 Eigenwerte und zugehörige Basislösungen

FS1 Einfache reelle Eigenwerte
Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher Eigenwert von L, d.h. eine einfache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$, dann ist

$$y(x) = e^{\lambda_0 x}$$

die zugehörige Basislösung.

Beispiel
$L[y] = y'' - y' - 6y = 0$
Charakteristisches Polynom:$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$

zugehörige Basislösungen: $y_1(x) = e^{-2x} \quad y_2(x) = e^{3x}$
Die allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

FS2 Einfache komplexe Eigenwerte - kompexe Basislösungen
Ist $\lambda_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ ein einfacher Eigenwert von L mit $b = \operatorname{Im}(\lambda_0) \neq 0$, dann ist

$$y(x) = e^{\lambda_0 x} = e^{(a+bi)x}$$

die zugehörige komplexe Basislösung.

Erzeugung von reellen Basislösungen zu einem einfachen komplexen Eigenwert:

Wir formen die komplexe Basislösung nun mit der Eulerschen Formel um:

$$y(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax+bxi} = e^{ax}e^{bxi} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = \underbrace{e^{ax}\cos bx}_{=:u(x)} + i\,\underbrace{e^{ax}\sin bx}_{=:v(x)}$$

Wir zeigen nun mit einem Vergleich von Real- und Imaginärteilen und der Linearität von L, dass die so definierten reellwertigen Funktionen u und v Lösungen der homogenen Gleichung sind.

$$0 + i \cdot 0 = 0 = L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v] \Rightarrow (L[u] = 0) \wedge (L[v] = 0)$$

Wir erhalten somit zwei Lösungen
$u(x) = e^{ax}\cos bx$ und $v(x) = e^{ax}\sin bx$

Es scheint offensichtlich mehr reelle als komplexe Lösungen zu einem komplexen Eigenwert zu geben.
Aber der Schein trügt. Ein komplexer Eigenwert ist nach unserer Definition eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$. Aber $P(\lambda)$ hat nur reelle Koeffizienten, daher ist mit λ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle und damit ein Eigenwert und zwar mit gleicher Vielfachheit wie λ.

Zu $\overline{\lambda}$ gehört somit die Basislösung

$$y(x) = e^{\overline{\lambda}x} = e^{(a-bi)x} = u(x) - iv(x)$$

mit denselben Funktionen u und v wie beim Eigenwert λ.

Durch den konjugiert-komplexen Eigenwert kommen also keine neuen reellwertigen Lösungen hinzu.
Wir fassen diese Überlegungen zur nächsten Regel zusammen:

FS3 Einfache komplexe Eigenwerte – reelle Basislösungen
Sind $\lambda_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ und $\overline{\lambda}_0$ einfache Eigenwerte von L mit $b = \operatorname{Im}(\lambda_0) \neq 0$, dann sind

$$y_1(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{ax}\cos bx \qquad y_2(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{ax}\sin bx$$

die zugehörigen reellen Basislösungen.

Es bleibt noch der Fall mehrfacher Eigenwerte übrig.

FS4 Mehrfache Eigenwerte

Ist λ_0 ein m–facher reeller oder komplexer Eigenwert von L , dann sind

$$y(x), xy(x), \dots, x^{m-1}y(x) \quad \text{bzw} \quad y_1, xy_1, .., x^{m-1}y_1 \text{ und } y_2, xy_2, .., x^{m-1}y_2$$

die zugehörigen Basislösungen wobei y, y_1, y_2 die nach den Regeln für einfache Eigenwerte gebildete zugehörigen Basislösungen sind.

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel um ein Fundamentalsystem für L angeben zu können.

Satz

Ist L ein linearer Differentialoperator der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten, dann bilden
- die nach FS1, FS2, FS4 gebildeten zugehörigen Basislösungen ein komplexes Fundamentalsystem.
- die nach FS1, FS3, FS4 gebildeten zugehörigen Basislösungen ein reelles Fundamentalsystem.

Beide Fundamentalsysteme enthalten genau n Basislösungen $y_1, \dots, y_n$
. Die allgemeine Lösung von $L[y] = 0$ ist

$$y(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) \qquad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \ \text{ beliebig}$$

Bemerkung

Um diesen Satz zu beweisen, muss gezeigt werden, dass die verwendeten Basislösungen tatsächlich linear unabhängig sind (dafür stellen wir nach dem nächsten Beispiel als Hilfsmittel die Wronski-Determinante vor) und dass es keine Lösungen ausserhalb der Linearen Hülle unserer Basislösungen gibt. Letzteres läßt sich über die Lösbarkeit von Anfangswertproblemen mit dem Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf zeigen.

Folgerung aus dem letzten Satz

Da alle von uns konstruierten Basislösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und alle Linearkombinationen der Basislösungen diese Eigenschaft erben, sind somit alle Lösungen der homogenen Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Tabelle Eigenwerte und zugehörige Basislösungen

Eigenwert λ	Vielf.	Regeln	zugehörigen Basislösungen	reelles od. kompl. FS
reell	einfach	FS 1	$y = e^{\lambda x}$	reell
$a + bi$	einfach	FS 2 FS 3	$y = e^{\lambda x} = e^{(a+bi)x}$ $y_1 = e^{ax}\cos(bx), y_2 = e^{ax}\sin(bx)$	komplex reell
reell oder komplex	m–fach	FS 1,2,4 FS 3,4	$y, xy, .., x^{m-1}y$ $y_1, xy_1, .., x^{m-1}y_1, y_2, xy_2, .., x^{m-1}y_2$	reell/kompl reell

Beispiel
$y'' + y = 0$
Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

Eigenwerte: $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i = \overline{\lambda_1}$

Komplexes Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{ix} \quad y_2(x) = e^{-ix}$
Reelles Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x \quad y_2(x) = \sin x$
Die allgemeine Lösung der homogenen DGL:
komplex: $y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$
reell: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

1.2.2 Wronski-Determinante

Die Probe, ob n Lösungen von $L[y] \equiv 0$ wirklich ein Fundamentalsystem bilden, kann mit der Wronski-Determinante erfolgen.
Definition
Seien $y_1, \dots, y_n$ (n-1)-mal differenzierbare Funktionen auf einem reellen Intervall I, dann heißt

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ & \dots & \\ y_1^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

die Wronski-Determinante von $y_1, \dots, y_n$.
Bilden die $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem zum Differentialoperator L, dann heißt

$$\underline{\underline{Y}}(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ & \dots & \\ y_1^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix zu L.
Die Wronskideterminante zu diesem Fundamentalsystem ist dann die Determinante der entsprechenden Fundamentalmatrix.
Für spätere Zwecke definieren wir noch die Streichungsmatrix $\underline{\underline{Y_{m,k}}}$. Wir verstehen darunter die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch streichen der m-ten Zeile und k-tenSpalte entsteht.

Satz Wronski-Determinante 1
Sind $y_1, \dots, y_n$ Lösungen von $L[y] \equiv 0$, dann bilden sie ein Fundamentalsystem genau dann, wenn $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung

(i) Aus FS1 bis FS4 und dem Satz über Fundamentalsysteme folgt, dass alle Lösungen der homogenen DGL unendlich oft differenzierbar sind. Sie erfüllen daher die Voraussetzungen aus der Definition der Wronski-Determinante.

(ii) Es läßt sich zeigen, dass die Wronski-Determinante von n Lösungen der homogenen DGL sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ ungleich Null ist, wenn dies für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt.

(iii) Es gilt auch eine sehr viel allgemeinere Version dieses Satzes, bei dem die y_i keine Lösungen der homogenen DGL sein müssen, sondern nur den Voraussetzungen aus der Definition der Wronski-Determinante genügen müssen.

Satz Wronski-Determinante 2
Seien $y_1, \dots, y_n$ (n-1)-mal differenzierbare Funktionen auf einem reellen Intervall I mit $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$, dann sind $y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig.

Bemerkung
In dieser Variante des Satzes gilt die Umkehrung jedoch nicht. Es gibt unter diesen schwächeren Voraussetzungen Funktionen, die linear unabhänigig sind und deren Wronski-Determinante trotzdem gleich Null ist.

1.2.3 Anfangswertprobleme (AWP)

Oft werden nicht alle möglichen Lösungen der DGL gesucht sondern nur diejenigen, die bestimmten Anfangsbedingungen an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ genügen.
Sei die Funktion g auf einem reellen Intervall I erklärt und $x_0 \in I$, dann lautet das Anfangswertproblem
$L[y] = g$
$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$
mit Konstanten $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$

Beispiel
$y'' + y = 0$
$y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen DGL haben wir schon früher berechnet.
$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

Anpassen an die Anfangsbedingungen:
$I \quad \sqrt{2} = y(\frac{\pi}{4}) = c_1 \cos\frac{\pi}{4} + c_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}}$
$II \quad 0 = y'(\frac{\pi}{4}) = -c_1 \sin\frac{\pi}{4} + c_2 \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}}$
liefert

$c_1 = c_2 = 1$
Somit löst $y(x) = \cos x + \sin x$ das AWP.

1.3 Inhomogene Gleichungen

Einzelne Lösungen der inhomogen Gleichung werden partikuläre Lösungen genannt. Sei y_p eine solche Lösung und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, dann sind die Lösungen $y = y_p + y_h$ sämtlich Lösungen der inhomogenen Gleichung.
Denn aus $L[y_p](x) = g(x)$ und $L[y_h](x) = 0$ folgt:
$L[y_p + y_h](x) = L[y_p](x) + L[y_h](x) = g(x) + 0 = g(x)$

Damit sind aber auch alle Lösungen von $L[y] = g$ gegeben, denn die Differenz von zwei partikulären Lösungen y_{p_1} und y_{p_2} ist stets eine Lösung der homogenen Gleichung:
$L[y_{p_1} - y_{p_2}] = L[y_{p_1}] - L[y_{p_2}] = g - g = 0$

Satz
Ist y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, dann bilden die Lösungen $y = y_p + y_h$ die Gesamtheit aller Lösungen von $L[y] = g$.

Im Folgenden wird es nun darum gehen, partikuläre Lösungen aufzufinden, da wir die Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung bereits zur Verfügung haben.

Wir stellen hier zwei Methoden vor. Die Methode der "Variation der Konstanten", die wir für den Fall $n = 2$ ausführlich vorführen und die Ansatzmethode für spezielle Störfunktionen für beliebige natürliche Ordnungen.

1.3.1 Variation der Konstanten für Gleichungen der Ordnung 2

Dividiert man die Gleichung $L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = g$ durch a_n, dann erhält man die Eins als höchsten Koeffizienten. Dies ist stets möglich, da wir $a_n \neq 0$ vorausgesetzt haben. Wir setzen im Folgenden somit ohne Einschränkung $a_n = 1$ voraus. Dies gestaltet die Rechnungen etwas einfacher. Außerdem setzen wir voraus, dass die Störfunktion g auf einem abgeschlossenen reellen Intervall I=[a;b] definiert und stetig ist.
Bilden y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem für L, dann lautet der Ansatz:
$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$
mit der Bedingung $I \quad c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$.
Die Bedingung I garantiert uns die zweimalige Differenzierbarkeit von y_p.

Berechnung von y_p' und y_p'':
$y_p' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2' = c_1y_1' + c_2y_2'$ wegen der Bedingung I
$y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$

Somit gilt:
$L[y] = y_p'' + a_1y_p' + a_0y_p = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + a_1(c_1y_1' + c_2y_2') + a_0(c_1y_1 + c_2y_2)$
$= c_1L[y_1] + c_1L[y_1] + c_1'y_1' + c_2'y_2'$
$= c_1'y_1' + c_2'y_2'$, da y_1, y_2 Fundamentallösungen sind.
Aus der Forderung $L[y_p] = g$ folgt somit die Bedingung
$II \quad c_1'y_1' + c_2'y_2' = g$.

Das Gleichungssystem
$I \quad c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$
$II \quad c_1'y_1' + c_2'y_2' = g$
läßt sich nach c_1' und c_2' auflösen mit dem Ergebnis:

$$c_1' = \frac{-gy_2}{w} \quad c_2' = \frac{gy_1}{w}$$

Dabei ist $w = w(y_1; y_2)$ die Wronski-Determinante.
Wegen der Stetigkeit aller beteiligten Funktionen inklusive g auf dem abgeschlossenen Intervall I, existieren auch Stammfunktionen c_1 und c_2 von c_1' und c_2':
$c_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(-1)^k g(t)y_{3-k}(t)}{w(t)} dt$
mit beliebigem $x_0 \in I$ als untere Grenze des Integrals.
Damit ist für diesen Fall eine partikuläre Lösung gesichert.

Beispiel
$y'' - y = 4e^x$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm 1$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^x$ und $y_1(x) = e^{-x}$
Wronski-Determinante: $w(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$
$c_1(x) = \int\limits_0^x \frac{-4e^te^{-t}}{-2} dt = 2x$
$c_2(x) = \int\limits_0^x \frac{4e^te^t}{-2} dt = 1 - e^{2x}$
Somit erhalten wir die partikuläre Lösung:
$y_p(x) = 2xe^x + (1 - e^{2x})e^{-x} = 2xe^x - 2\sinh x$
und die allgemeine Lösung:
$y(x) = 2xe^x - 2\sinh x + c_1e^x + c_2e^{-x}$

1.3.2 Variation der Konstanten für Gleichungen höherer Ordnung

Bilden y_1 bis y_n ein Fundamentalsystem für L mit $a_n = 1$ und ist g stetig auf I, dann lautet der Ansatz wieder:
$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$.
Wir geben hier nur Formeln für die c_k' bzw. c_k unter Verwendung der Fundamentalmatrix $\underline{\underline{Y}}(x) = \underline{\underline{Y}}(y_1, \ldots, y_n)(x)$ und der Wronskideterminante $W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x)$ an.
Wir verzichten auf eine ausführliche Herleitung, da sie am elegantesten über äquivalente Systeme erster Ordnung erfolgt (siehe BHW, Bd3, Abschnitt 2.3). Die Voraussetzungen für diesen Beweis haben wir aber in dieser Vorlesung noch nicht behandelt.
Es ergeben sich für die Ableitungen der variierten Konstanten c_k:

$$c_k'(x) = \frac{(-1)^{n+k} g(x)}{W(x)} \left| \underline{\underline{Y n,k}}(x) \right|$$

bzw.

$$c_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+k} g(t)}{W(t)} \left| \underline{\underline{Y n,k}}(t) \right| dt$$

mit beliebigem $x_0 \in I$ als untere Grenze des Integrals.

<u>Bemerkung</u>
Für $n = 2$ ergeben sich genau die gleichen Ergebnisse für die c_k', wie wir sie zuvor ausführlich berechnet haben.
<u>Beispiel $n = 3$</u>
$y''' - y'' = \frac{(x+1)}{x^2}$

$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$
Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_1 = 1$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = 1, y_2(x) = x$ und $y_3(x) = e^x$
Fundamentalmatrix

$$\underline{\underline{Y}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}$$

Wronski-Determinante: $W(x) = e^x$

$$\left| \underline{\underline{Y_{3,1}}}(x) \right| = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x$$

$$\left| \underline{\underline{Y_{3,2}}}(x) \right| = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x$$

$$\left| \underline{\underline{Y_{3,3}}}(x) \right| = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ableitungen der variierten Konstanten:
$c_1'(x) = \frac{(-1)^{3+1} g(x)}{W(x)} \left| \underline{\underline{Y_{3,1}}}(x) \right| = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$
$c_2'(x) = \frac{(-1)^{3+2} g(x)}{W(x)} \left| \underline{\underline{Y_{3,2}}}(x) \right| = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$
$c_3'(x) = \frac{(-1)^{3+3} g(x)}{W(x)} \left| \underline{\underline{Y_{3,3}}}(x) \right| = \frac{1+x}{x^2} e^{-x}$
Wir bilden die unbestimmten Integrale über die c_k':
$\int c_1'(x)\,dx = \int 1 - \frac{(1)}{x^2}\,dx = x + \frac{1}{x} + C$
$\int c_2'(x)\,dx = \int -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x} - \ln x + C$
$\int c_3'(x)\,dx = \int \frac{(1+x)}{x^2} e^{-x}\,dx = -\frac{1}{x} e^{-x} + C$
Für die variierten Konstanten erhalten wir damit

$$c_1(x) = x + \frac{1}{x} \quad c_2(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad c_3(x) = -\frac{1}{x} e^{-x}$$

und bilden jetzt die partikuläre Lösung
$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_1(x)y_1(x) + c_3(x)y_3(x) = (x + \frac{1}{x}) \cdot 1 + (\frac{1}{x} - \ln x)x - \frac{1}{x} e^{-x} e^{x} = x + 1 - x \ln x$
Da $x + 1$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, ist auch
$y_p(x) = -x \ln x$
eine partikuläre Lösung.
Somit ergibt sich als allgemeine Lösung:
$y(x) = -x \ln x + c_1 + c_2 x + c_3 e^x$ mit beliebigen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

1.3.3 Ansatzmethode für spezielle Störfunktionen

Ist die Störfunktion vom Typ $g(x) = q(x)e^{ax} trig(bx)$, wobei $q(x)$ ein Polynom und $trig$ eine der Funktionen cos oder sin ist ($trig(bx) = \cos bx$ oder $trig(bx) = \sin bx$) . Dann läßt sich eine partikuläre Lösung mit einem Ansatz oft leichter bestimmen als mit der Variation der Konstanten. Das liegt daran, dass die auftretenden Integrale bei der Variation der Konstanten oft komplizierte Berechnungen erfordern.

Gilt mit den Parametern a und b aus der Störfunktion, dass $\varkappa := a + bi$ kein Eigenwert von L ist, dann liegt keine Resonanz vor und es wird der Normalansatz verwendet:

$$y_p(x) = Q_1(x)e^{ax} \cos(bx) + Q_2(x)e^{ax} \sin(bx)$$

Hier sind die Q_i Polynome mit unbestimmten Koeffizienten vom gleichen Grad wie q.

Ist $\varkappa := a + bi$ (Kappa) ein m-facher Eigenwert von L ist, dann liegt Resonanz vor und es wird der Resonanzansatz (der mit x^m multiplizierte Normalansatz) verwendet:

$$y_p(x) = x^m (Q_1(x)e^{ax} \cos(bx) + Q_2(x)e^{ax} \sin(bx))$$

Q_i sind Polynome wie beim Normalansatz.

Tabelle zur Ansatzmethode

Störfunktion	$\varkappa$	Normalansatz für $y_p(x)$	Resonanzansatz für $y_p(x)$ bei m-fachen EW
Polynom $q(x)$	0	$Q(x)$	$x^m Q(x)$
Bsp: $3x^2 - 2x$	0	$Ax^2 + Bx + C$	$x^m(Ax^2 + Bx + C)$
$q(x)e^{ax}$	a	$Q(x)e^{ax}$	$x^m Q(x)e^{ax}$
Bsp: $5xe^{-x}$	-1	$(Ax + B)e^{-x}$	$x^m(Ax + B)e^{-x}$
$q(x)trig(bx)$	bi	$Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx$	$x^m(Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx)$
$q(x)e^{ax}trig(bx)$	a+bi	$e^{ax}\left\{\begin{array}{c} Q_1(x)\cos(bx) \\ +Q_2(x)\sin(bx)\end{array}\right\}$	$x^m e^{ax}\left\{\begin{array}{c} Q_1(x)\cos(bx) \\ +Q_2(x)\sin(bx)\end{array}\right\}$

Q und Q_i steht hier jeweils für ein Polynom vom gleichen Grad wie das Polynom q aus der ersten Spalte. Der Funktionsname *trig* steht für eine der trigonometrischen Funktionen Cosinus oder Sinus.

Beispiel

$y''(x) + y(x) = \sin x$

$g(x) = \sin x \longrightarrow \varkappa = a + bi = 0 + 1 \cdot i = i$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm i$

Somit liegt ein Resonanzfall mit einem einfachen Eigenwert vor und der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= x(A\cos x + B\sin x) \\
y_p'(x) &= (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x \\
y_p''(x) &= (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x \\
y_p''(x) + y_p(x) &= 2B\cos x - 2A\sin x \overset{!}{=} \sin x
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $A = -\frac{1}{2}$ und $B = 0$
und die partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -\frac{x\cos x}{2}$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen DGL lautet:

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{x\cos x}{2}$$

Superposition

Ist die Störfunktion eine endliche Summe von Funktionen der angegebenen Typen, dann ist als Ansatz die Summe der entsprechernden Ansatzfunktionen der Summanden zu verwenden.