Robert Labus Wintersemester 2016/2017

Sturm-Liouville-Probleme

Funktionenräume

Im Folgenden sind $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen mit $a < b$ und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.
Mit J bezeichnen wird das abgeschlossene Intevall $J = [a; b]$.

Definition 0.1. *Stetige Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Intervallen*

(i) *Eine stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn f auf $\mathring{J} = (a; b)$ stetig differenzierbar ist und sich alle $f^{(i)}$ $i = 1, \ldots, k$ stetig auf J fortsetzen lassen.*

(ii) *Eine stetige Funktion $f = g + ih : J \to \mathbb{C}$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn $g = \operatorname{Re} f$ und $h = \operatorname{Im} f$ auf J k-mal stetig differenzierbar sind.*

(iii) *Mit $C^k(J,\mathbb{R})$ bzw. $C^k(J,\mathbb{C})$ bezeichnen wir die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren reelwertigen bzw. komplexwertigen Funktionen auf J.*

Bemerkung 0.2. *Die Mengen $C^k(J,\mathbb{R})$ und $C^k(J,\mathbb{C})$ bilden mit der Addition von Funktionen*
$f + g$ mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ für alle $x \in J$
und der Multiplikation von Funktionen mit einem Skalar
λf mit $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in J$
einen reellen resp. komplexen Vektorraum.
Diese Vektorräume besitzen keine endlichen Basen, es handelt sich um unendlichdimensionale Vektorräume.

Für das Weitere bezeichnen wir mit $\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ und $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$, deren Komponenten nicht beide gleich Null sind, d.h. $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$.

Für Funktionen $u \in C^2(J,\mathbb{C})$ bezeichnen wir die folgenden Gleichungen als Randbedingungen.

$$
\begin{array}{ll}
I & \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\
II & \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0
\end{array}
$$

Mit der Bezeichnung $\underline{\hat{u}}(x) := \begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{bmatrix}$ lauten die Randbedingungen:

$$I \quad \left\langle \underline{\alpha} \,; \underline{\hat{u}}(a) \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad II \quad \left\langle \underline{\beta} \,; \underline{\hat{u}}(b) \right\rangle = 0$$

Die Menge aller Funktionen u, die den Randbedingungen I und II genügen, bilden einen Unterraum von $C^2(J,\mathbb{C})$.
Diesen Unterraum bezeichnen wir mit D

$$D = \{\, u \in C^2(J,\mathbb{C}) \quad | \quad \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \text{und} \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \,\}$$

Der Unterraum D enthält mindestens die Nullfunktion $\boldsymbol{0}$, d.h. die konstante Funktion $\boldsymbol{0}$ mit $\boldsymbol{0}(x) \equiv 0$.
Wir werden D im Weiteren als Definitionsbereich von Differentialoperatoren verwenden. Die Vorgabe von Randbedingungen erfolgt somit direkt durch den Operator mittels seines Definitionsbereichs.

Sturm-Liouville-Operatoren

Definition 0.3. *Sturm-Liouville-Operatoren*
Für zwei reellwertige Funktionen $p \in C^1(J,\mathbb{R})$ und $q \in C^0(J,\mathbb{R})$ heißt die Abbildung L mit

$$\begin{aligned} \mathrm{L}: \quad D &\longrightarrow C^0(J,\mathbb{C}) \\ u &\longmapsto \mathrm{L}[u] = -(pu')' + qu \end{aligned}$$

ein Sturm-Liouville-Operator, kurz SL-Operator.

Bemerkung 0.4. L *ist ein linearer Differentialoperator 2. Ordnung.*

$$\mathrm{L}[u] = -(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu \tag{0.1}$$

Definition 0.5. *Eigenwert, Eigenfunktion eines SL-Operators*
Wird eine Funktion $u \in D \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ durch L auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet,

$$\mathrm{L}[u] = \lambda u \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

dann heißt u ein Eigenvektor oder eine Eigenfunktion und λ ein Eigenwert des SL-Operators.

Lemma 0.6.
Ist L ein SL-Operator, dann gilt für alle $u,v \in D$

$$\int_a^b v\ \mathrm{L}[u]\ dx = \int_a^b \mathrm{L}[v]\,u\ dx$$

Beweis:
Zunächst zeigen wir, dass $F = p(uv' - u'v)$ eine Stammfunktion von $v\ \mathrm{L}[u] - \mathrm{L}[v]\,u$ ist.
Dann zeigen wir, dass F am Rand von J Nullstellen hat.
Daraus schliessen wir dann auf die Behauptung.

Aus (0.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} v\,\mathrm{L}[u] - \mathrm{L}[v]u &= v(-pu'' - p'u' + qu) - (-pv'' - p'v' + qv)u \\ &= p'(uv' - u'v) + p(uv'' - u''v) + q(uv - uv) \\ &= p'(uv' - u'v) + p(uv'' - u''v) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{d}{dx}\,[\,p(uv' - u'v)\,] \\ &= p'(uv' - u'v) + p(u'v' + uv'' - u''v - u'v') \\ &= p'(uv' - u'v) + p((uv'' - u''v)\,.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$v\,\mathrm{L}[u] - \mathrm{L}[v]u \;=\; \frac{d}{dx}\,[\,p(uv' - u'v)\,] \;=\; F'(x) \tag{0.2}$$

Wir zeigen jetzt, dass $F(a) = 0 = F(b)$ gilt.
Aus $u,v \in D$ folgt, dass u und v die Randbedingungen erfüllen: $\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{u}}(a)\right\rangle = 0$ und $\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{v}}(a)\right\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 0 &= v'(a)\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{u}}(a)\right\rangle - u'(a)\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{v}}(a)\right\rangle &&= \left\langle \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\\ v'(a)u'(a) - u'(a)v'(a)\end{bmatrix}\right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle &&= \big(\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,\big)\;\alpha_1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}0 &= u(a)\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{v}}(a)\right\rangle - v(a)\left\langle \underline{\alpha}\,;\,\underline{\hat{u}}(a)\right\rangle &&= \left\langle \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}u(a)v(a) - v(a)u(a)\\ u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\end{bmatrix}\right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\ u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\end{bmatrix}\right\rangle &&= \big(\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,\big)\;\alpha_2\end{aligned}$$

Es folgt

$$\big(\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,\big)\quad \underline{\alpha} \quad = \quad \begin{bmatrix}\big(\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,\big) & \alpha_1\\ \big(\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,\big) & \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \underline{0}$$

und (da nach Voraussetzung $\underline{\alpha} \neq \underline{0}$ ist)

$$u(a)v'(a) - v(a)u'(a) = 0 \Rightarrow F(a) = p(a)[\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,] = 0$$

Tauschen wir in dieser Rechnung $\underline{\alpha}$ durch $\underline{\beta}$ und a durch b aus, dann folgt

$$F(b) = p(b)[\,u(b)v'(b) - v(b)u'(b)\,] = 0$$

Damit erhalten wir aus (0.2) :

$$\int_a^b v \; \mathrm{L}[u] - \mathrm{L}[v]\, u \; dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(a) - F(b) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b v \; \mathrm{L}[u] \; dx = \int_a^b \mathrm{L}[v]\, u \; dx$$

□

Mit dem Lemma können wir jetzt zeigen, dass ein SL-Operator nur reelle Eigenwerte besitzen kann.

Satz 0.7.
Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert eines SL-Operators L auf D, dann gilt $\operatorname{Im} \lambda = 0$, d.h. λ ist reell.

Beweis:
Mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von L.
Ist $u \in D$ eine Eigenfunktion für λ, dann ist auch $\overline{u} \in D$ und $\overline{u}$ ist eine Eigenfunktion zu $\overline{\lambda}$.
Daher gilt

$$\mathrm{L}[u] = \lambda u \qquad \text{und} \qquad \mathrm{L}[\overline{u}] = \overline{\lambda}\overline{u}$$

Mit Lemma 0.6 folgt aus $u, \overline{u} \in D$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \mathrm{L}[u]\,\overline{u} \;-\; u\; \mathrm{L}[\overline{u}]\, dx \\ &= \int_a^b \lambda u\,\overline{u} \;-\; u\,\overline{\lambda}\overline{u}\, dx \\ &= (\lambda - \overline{\lambda}) \underbrace{\int_a^b \,|\, u(x)\,|^2 \; dx}_{>0} \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist größer als Null, da u stetig ist und nicht identisch gleich Null ist.
Es folgt $\qquad 2 \operatorname{Im} \lambda = \lambda - \overline{\lambda} = 0, \qquad$ d.h. λ ist reell. □

Beispiel 0.8
Gesucht sind alle Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $u \in C^2([0;l],\mathbb{C})$ für ein gegebenes $l \in \mathbb{R}^{>0}$, welche die DGL

$$u'' + \lambda u = 0 \qquad \text{mit der Randbedingung} \qquad u(0) = u(l) = 0$$

lösen.

Diese Aufgabe entspricht der Suche nach Eigenwerten und Eigenfunktionen des SL-Operators

$$\mathrm{L}[u] = -u'' \qquad \text{auf} \quad D = \{\, u \in C^2(J,\mathbb{C}) \,|\, \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = 0 \text{ und } \beta_1 u(l) + \beta_2 u'(l) = 0 \,\}$$

mit

$$J = [0; l], \quad \underline{\alpha} = \underline{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 0$$

Nach Satz 0.7 sind alle Eigenwerte reell.

Wir zeigen zunächst,

(i) dass Null kein Eigenwert ist,

(ii) dass es keine negativen Eigenwerte gibt.

zu (i): Angenommen $\lambda = 0$ wäre ein Eigenwert.

Dann gibt es eine Eigenfunktion $u \in D, u \neq \boldsymbol{0}$ mit
$\mathrm{L}[u] = -u''(x) = 0 \cdot u(x) = 0$
$\Rightarrow u(x) = Ax + B$
Aus den Randbedingungen folgt: $0 = u(0) = B$ und $0 = u(l) = A \cdot l \Rightarrow A = 0$
Insgesamt folgt $u(x) \equiv 0$, d.h. $u = \boldsymbol{0}$ ↯ Widerspruch zur Annahme.
Also ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

zu (ii): Angenommen $\lambda_0 < 0$ wäre ein Eigenwert.

Dann gibt es eine Eigenfunktion $u \in D, u \neq \boldsymbol{0}$ mit $\mathrm{L}[u] = \lambda_0\, u$
$\Rightarrow -u'' = \lambda_0\, u \Rightarrow u'' = -\lambda_0\, u = |\lambda_0|\, u$
Damit löst jede Eigenfunktion u die DGL

$$u'' - |\lambda_0|\, u = 0 \tag{0.3}$$

Das charakteristische Polynom der DGL (0.3) ist $p(\lambda) = \lambda^2 - |\lambda_0|$.
Es hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda_0|}$.
Damit bilden die Funktionen $u_1(x) = e^{\sqrt{|\lambda_0|}x}$, $u_2(x) = e^{\sqrt{-|\lambda_0|}x}$
ein Fundamentalsystem für (0.3).
Beide Funktionen gehören aber nicht zu D, d.h. sie erfüllen nicht die Randbedingungen, denn
$u_1(0) = u_2(0) = e^0 = 1 \neq 0$
Es gibt daher keine Eigenfunktionen zu $\lambda_0 < 0$ ↯ Widerspruch zur Annahme.

Wir suchen jetzt nach positiven reellen Eigenwerten und zeigen

(iii) Es gibt unendlich viele positive reelle Eigenwerte.

Sei $\lambda_0 > 0$ ein Eigenwert.
Dann gibt es eine Eigenfunktion $u \in D, u \neq \boldsymbol{0}$ mit $\mathrm{L}[u] = \lambda_0\, u$
$\Rightarrow -u'' = \lambda_0\, u \Rightarrow u'' = -\lambda_0\, u$
Damit löst jede Eigenfunktion u die DGL

$$u'' + \lambda_0\, u = 0 \tag{0.4}$$

Das charakteristische Polynom der DGL (0.4) ist $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda_0$.
Es hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_0}\, i$.
Damit bilden die Funktionen $u_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda_0}\, x), u_2(x) = \sin(\sqrt{\lambda_0}\, x)$
ein reelles Fundamentalsystem für (0.4).

Überprüfung der Randbedingungen:
$u_1(0) = \cos 0 = 1 \quad$ und $\quad u_2(0) = \sin 0 = 0$
Somit scheidet u_1 aus, da es die erste Randbedingung nicht erfüllt.

Überprüfung der zweiten Randbedingung für u_2:
$0 = u_2(l) = \sin(\sqrt{\lambda_0}\, l) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\lambda_0}\, l = k\pi \quad$ für ein $k \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow\; \lambda_0 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Als Ergebnis erhalten wir somit:
$\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N} \quad$ sind die Eigenwerte von L und
$u_k(x) = c \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x) = c \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad c \in \mathbb{R}^{\neq 0} \quad$ sind die zugehörigen reellen Eigenfunktionen.

(Ende des Beispiels 0.8)

Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt geht es um die Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen mit einem SL-Operator.

$$\mathrm{L}[u] = f, \qquad u \in D, f \in C^0(J,\mathbb{R}) \tag{0.5}$$

Das Ziel ist es, zu SL-Operatoren L auf D eine Funktion
$G : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
zu konstruieren mit der Eigenschaft:
Für jedes $f \in C^0(J,\mathbb{R})$ ist

$$u(x) := \int_a^b G(x,y) f(y)\, dy \tag{0.6}$$

eine Lösung der DGL (0.5) aus D, d.h. eine Lösung, die den Randbedingungen genügt.

Die Funktion G, der sogenannte Kern dieser Integraldarstellung der Lösung u, wird
Greensche Funktion zum SL-Operator L genannt.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer Greenschen Funktion zum SL-Operator L aus Beispiel 0.8 ($p(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0$).
Dazu bestimmen wir ein Fundamentalsystem u_1, u_2 zum Operator

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\mathrm{L}}: & C^2(J,\mathbb{C}) & \longrightarrow & C^0(J,\mathbb{C}) \\ & u & \longmapsto & \widetilde{\mathrm{L}}[u] = -u'' \end{array}$$

Der Unterschied zwischen $\widetilde{\mathrm{L}}$ und L liegt in dem größeren Definitionsbereich, der hier keine Randbedingungen berücksichtigt. Stattdessen fordern wir von dem Fundamentalsystem zwei zusätzliche Bedingungen.

$$
\begin{aligned}
I \qquad & \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) = 0 \\
II \qquad & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) = 0
\end{aligned}
$$

Mit den Daten aus Beispiel 0.8 $\quad (\; J = [0; l], \underline{\alpha} = \underline{\beta} = [1; 0]^\top \;)$ ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
I \qquad & u_1(l) = 0 \\
II \qquad & u_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

Da die allgemeine Lösung von $-u''(x) = 0$ durch $u(x) = Ax + B$ gegeben ist, ergibt sich durch die Bedingungen I und II z.B. das Fundamentalsystem

$$
u_1(x) = x - l \qquad \text{und} \qquad u_2(x) = x
$$

Für dieses Fundamentalsystem ist $\quad p(u_1'u_2 - u_1u_2')$ eine konstante Funktion mit einer positiven Konstanten, denn

$$
p(x)\left(\, u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x) \,\right) = 1 \cdot (1 \cdot x - (x - l) \cdot 1) = x - x + l = l > 0
$$

Somit ist auch

$$
v_1(x) = u_1(x) = x - l \qquad \text{und} \qquad v_2(x) = \frac{u_2(x)}{-p(u_1'u_2 - u_1u_2')} = -\frac{x}{l}
$$

ein Fundamentalsystem. Mit diesem bilden wir die Funktion

$$
G(x,y) = \begin{cases} v1(x)v_2(y) & \text{für} \quad 0 \le y \le x \le l \\ v2(x)v_1(y) & \text{für} \quad 0 \le x \le y \le l \end{cases} \tag{0.7}
$$

$$
= \begin{cases} -(x-l)\dfrac{y}{l} = y - \dfrac{xy}{l} & \text{für} \quad 0 \le y \le x \le l \\[2ex] -\dfrac{x}{l}(y-l) = x - \dfrac{xy}{l} & \text{für} \quad 0 \le x \le y \le l \end{cases} \tag{0.8}
$$

Die Funktion G ist symmetrisch in x und y: Für alle $x, y \in J$ gilt: $\quad G(x,y) = G(y,x)$, denn

für $x \leq y$ gilt: $\quad G(x,y) = x - \frac{xy}{l} = G(y,x)$
und
für $y \leq x$ gilt: $\quad G(x,y) = y - \frac{xy}{l} = G(y,x)$.

Satz 0.9.
Die Funktion G aus (0.7) bzw. (0.8) ist die Greensche Funktion zum SL-Operator aus Beispiel 0.8.

Für $\quad u(x) = \int\limits_0^l G(x,y)f(y)\,dy \quad$ *gilt*

(i) $u \in D = \{\, u \in C^2([0;l],\mathbb{C}) \mid u(0) = u(l) = 0 \,\}$

(ii) $\mathrm{L}[u] = f$

Beweis:
zu (i):

$$u(0) = \int\limits_0^l \underbrace{G(0,y)}_{=0} f(y)\,dy = 0$$
$$u(l) = \int\limits_0^l G(l,y)f(y)\,dy = \int\limits_0^l \underbrace{\left(y - \frac{ly}{l}\right)}_{=0} f(y)\,dy = 0$$

zu (ii):

$$\begin{aligned}
u(x) = \int\limits_0^l G(x,y)f(y)\,dy &= \int\limits_0^x G(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_x^l G(x,y)f(y)\,dy \\
&= \int\limits_0^x \left(y - \frac{xy}{l}\right) f(y)\,dy + \int\limits_x^l \left(x - \frac{xy}{l}\right) f(y)\,dy \\
&= \int\limits_0^x y\left(1 - \frac{x}{l}\right) f(y)\,dy + \int\limits_x^l x\left(1 - \frac{y}{l}\right) f(y)\,dy \\
&= \left(1 - \frac{x}{l}\right) \int\limits_0^x y f(y)\,dy - x \int\limits_l^x \left(1 - \frac{y}{l}\right) f(y)\,dy
\end{aligned}$$

In der Rechnung haben wir die Regel $\left(\int\limits_a^b \ldots = -\int\limits_b^a \ldots\right)$ verwendet. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integral-rechnung $\left(\frac{d}{dx}\int\limits_a^x h(y)dy = h(x)\right)$ können wir jetzt die Ableitungen u' und u'' berechnen.

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= -\frac{1}{l}\int\limits_0^x y f(y)\,dy \underline{+\left(1-\frac{x}{l}\right)xf(x)} - \int\limits_l^x \left(1-\frac{y}{l}\right) f(y)\,dy \underline{-x\left(1-\frac{x}{l}\right) f(x)} \\
&= -\frac{1}{l}\int\limits_0^x y f(y)\,dy - \int\limits_l^x \left(1-\frac{y}{l}\right) f(y)\,dy \\
u''(x) &= -\frac{1}{l}xf(x) - \left(1-\frac{x}{l}\right) f(x) \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathrm{L}[u](x) = -u''(x) = f(x)
$$

$\square$

Beispiel 0.10
Löse $\quad u'' + 1 = 0 \quad$ mit $\quad u(0) = u(1) = 0$

Gesucht ist eine Lösung $u \in D = \{\, u \in C^2([0;1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \,\}$ von
$\mathrm{L}[u] = -u'' = f \quad$ mit $\quad f(x) \equiv 1$

Nach Satz 0.9 lautet die Lösung:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int\limits_0^1 G(x,y)f(y)\,dy = \int\limits_0^1 G(x,y)\,dy \\
&= \int\limits_0^x y(1-x)\,dy + \int\limits_x^1 x(1-y)\,dy \\
&= (1-x)\int\limits_0^x y\,dy + x\int\limits_x^1 1-y\,dy \\
&= \int\limits_0^x y\,dy + x(1-x) - x\int\limits_0^1 y\,dy \\
&= \frac{x-x^2}{2}
\end{aligned}
$$

Wir wollen den Satz 0.9 jetzt auf eine größere Klasse von SL-Operatoren verallgemeinern. Wir beschränken uns dabei auf SL-Operatoren mit trivialem Kern.

Zur Erinnerung: Der Kern einer linearen Abbildung L besteht aus allen Elementen des Definitionsbereichs (hier der Unterraum D von $C^2(J)$), die auf den Nullvektor (hier die Nullfunktion $\boldsymbol{0}$) abgebildet werden. Enthält der Kern von L also nur die $\boldsymbol{0}$, dann bedeutet dies, dass die homogene DGL $\mathrm{L}[u](x) = 0$ nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$ in D besitzt und dass die inhomogenen Gleichungen $\mathrm{L}[u](x) = f$ jeweils höchstens eine Lösung haben können, kurz eine solche Abbildung ist injektiv.

Sei nun $\mathrm{L}[u] = -(pu')' + qu$ ein injektiver SL-Operator auf

$$\begin{aligned} D &= \{\, u \in C^2(J,\mathbb{C}) \,|\, \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \text{ und } \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \,\} \\ &= \{\, u \in C^2(J,\mathbb{C}) \,|\, \big\langle \underline{\alpha}\,;\, \underline{\hat{u}}(a) \big\rangle = 0 \text{ und } \big\langle \underline{\beta}\,;\, \underline{\hat{u}}(b) \big\rangle = 0 \,\} \end{aligned}$$

Wir orientieren uns für die Konstruktion der Greenschen Funktion an dem Vorgehen im obigen speziellen Fall.

Für den Operator $\widetilde{\mathrm{L}}$, das ist L ohne Randbedingung (also mit Definitionsbereich $C^2(J,\mathbb{C})$),bestimmen wir ein Fundamentalsystem $u_1, u_2 \in C^2$ mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} I \qquad & \big\langle \underline{\beta}\,;\, \underline{\hat{u}_1}(b) \big\rangle = 0 \\ II \qquad & \big\langle \underline{\alpha}\,;\, \underline{\hat{u}_2}(a) \big\rangle = 0 \end{aligned}$$

Wir bestimmen dazu Lösungen der AWPe

AWP (1) $\widetilde{\mathrm{L}}[u] = 0$

$$\underline{\hat{u}}(b) = \begin{bmatrix} -\beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} := \underline{\widetilde{\beta}}$$

AWP (2) $\widetilde{\mathrm{L}}[u] = 0$

$$\underline{\hat{u}}(a) = \begin{bmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} := \underline{\widetilde{\alpha}}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf haben diese AWPe eindeutige Lösungen u_1, u_2 auf $J = [a; b]$.
Wegen $\big\langle \underline{\beta}\,;\, \underline{\widetilde{\beta}} \big\rangle = 0$ und $\big\langle \underline{\alpha}\,;\, \underline{\widetilde{\alpha}} \big\rangle = 0$ erfüllen u_1, u_2 auch die Bedingungen I und II.
Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Injektivität von L.
Wie im Beweis von Lemma 0.6 folgt für dieses Fundamentalsystem:

$$\frac{d}{dx}[\, p(u_1' u_2 - u_1 u_2')\,] = u_1 \widetilde{\mathrm{L}}[u_2] - \widetilde{\mathrm{L}}[u_1] u_2 = 0$$

Damit ist $\quad p(u_1' u_2 - u_1 u_2') = C \quad$ mit einer Konstanten $C \neq 0$.
(Das $C \neq 0$ sein muss, folgt aus den Bedingungen I, II und der Injektivität von L.)

Mit den Funktionen

$$v_1(x) = u_1(x) \qquad \text{und} \qquad v_2(x) = -\frac{1}{c} u_2(x)$$

erhalten wir ein Fundamentalsystem, dass den Bedingungen I und II genügt und die Gleichung

$$p(v_1' v_2 - v_1 v_2') = -1 \tag{0.9}$$

erfüllt.

Wir können jetzt die Greensche Funktion angeben.

Satz 0.11.

$$G(x,y) = \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \text{für} \quad a \le y \le x \le b \\ v_2(x)v_1(y) & \text{für} \quad a \le x \le y \le b \end{cases} \tag{0.10}$$

G ist die Greensche Funktion zum SL-Operator $\mathrm{L}[u] = -(pu')' + qu$.

Für $\quad u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy \quad$ *gilt*

(i) *Für alle* $x,y \in J$ *gilt:* $\quad G(x,y) = G(y,x)$

(ii) $u \in D$

(iii) $\mathrm{L}[u] = f$

Beweis:
zu (i):
für $a \le x \le y \le b$ gilt: $\quad G(x,y) = v_2(x)v_1(y) = G(y,x)$
und
für $a \le y \le x \le b$ gilt: $\quad G(x,y) = v_1(x)v_2(y) = G(y,x)$.

zu (ii):
Wir berechnen die Ableitungen von u, um nachzuweisen dass $u \in C^2$ ist.

$$\begin{aligned} u(x) &= \int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy = \int\limits_a^x G(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_x^b G(x,y)f(y)\,dy \\ &= \int\limits_a^x v_1(x)v_2(y)f(y)\,dy + \int\limits_x^b v_2(x)v_1(y)f(y)\,dy \\ &= v_1(x)\int\limits_a^x v_2(y)f(y)\,dy - v_2(x)\int\limits_b^x v_1(y)f(y)\,dy \end{aligned}$$

Die Integrale sind nach dem Hauptsatz differenzierbar und v_1, v_2 sind ohnehin aus C^2. Daher ist u differenzierbar.

$$\begin{aligned} u'(x) &= v_1'(x)\int\limits_a^x v_2(y)f(y)\,dy + \underline{v_1(x)v_2(x)f(x)} - v_2'(x)\int\limits_b^x v_1(y)f(y)\,dy - \underline{v_2(x)v_1(x)f(x)} \\ &= v_1'(x)\int\limits_a^x v_2(y)f(y)\,dy - v_2'(x)\int\limits_b^x v_1(y)f(y)\,dy \end{aligned}$$

Mit den gleichen Gründen wie eben ist auch u' differenzierbar.

$$\begin{aligned}
u''(x) &= v_1''(x)\int\limits_a^x v_2(y)f(y)\,dy + v_1'(x)v_2(x)f(x) - v_2''(x)\int\limits_b^x v_1(y)f(y)\,dy - v_2'(x)v_1(x)f(x)\\
&= \big(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x)\big)f(x) + v_1''(x)\int\limits_a^x v_2(y)f(y)\,dy - v_2''(x)\int\limits_b^x v_1(y)f(y)\,dy
\end{aligned}$$

Die Integrale aus der Darstellung von u'' sind differenzierbar und damit stetig. Alle anderen beteiligten Funktionen sind nach Voraussetzung mindestens stetig. Somit haben wir gezeigt, dass u zweimal stetig differenzierbar ist.

Es bleibt zu zeigen, dass u die beiden Randbedingungen erfüllt. Hierzu verwenden wir die soeben berechneten Darstellungen für u und u' an den Stellen $x = a$ bzw. $x = b$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= \alpha_1\Bigg(\underbrace{v_1(a)\int\limits_a^a v_2(y)f(y)\,dy}_{=0} - v_2(a)\int\limits_b^a v_1(y)f(y)\,dy\Bigg)\\
&\quad + \alpha_2\Bigg(\underbrace{v_1'(a)\int\limits_a^a v_2(y)f(y)\,dy}_{=0} - v_2'(a)\int\limits_b^a v_1(y)f(y)\,dy\Bigg)\\
&= -\alpha_1 v_2(a)\int\limits_b^a v_1(y)f(y)\,dy - \alpha_2 v_2'(a)\int\limits_b^a v_1(y)f(y)\,dy\\
&= -\Big(\underbrace{\alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 v_2'(a)}_{=0\text{ wg Bed. II}}\Big)\int\limits_b^a v_1(y)f(y)\,dy = 0
\end{aligned}$$

Analog folgt die 2. Randbedingung unter Verwendung der Bedingung I.

zu (iii):
Wir berechnen $\mathrm{L}[u] = -(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu$ mit den Ergebnissen aus Teil (ii).

$$
\begin{aligned}
-pu'' &= -\underbrace{p\left(v_1'v_2 - v_2'v_1\right)}_{=-1 \; nach \; (0.9)} f - pv_1'' \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy + pv_2'' \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
&= f - pv_1'' \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy + pv_2'' \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
-p'u' &= -p'v_1' \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy + p'v_2' \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
qu &= qv_1 \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy - qv_2 \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}[u] &= -pu'' - p'u' + qu \\
&= f - pv_1'' \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy + pv_2'' \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy - p'v_1' \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy + p'v_2' \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
&\quad + qv_1 \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy - qv_2 \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
&= f + [\underbrace{-pv_1'' - p'v_1' + qv_1}_{=\mathrm{L}[v_1]=0}] \int_a^x v_2(y)f(y)\,dy - [\underbrace{-pv_2'' - p'v_2' + qv_2}_{=\mathrm{L}[v_2]=0}] \int_b^x v_1(y)f(y)\,dy \\
&= f
\end{aligned}
$$

$\square$