Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

13. 02. 2013

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Ist A diagonaliserbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 1

Wir berechnen zunächst das charakteristiche Polynom $P_A(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= det(A - \lambda E) \\
&= det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-4-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -4 \\ 9 & 8-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-4-\lambda)\left[(-4-\lambda)(8-\lambda)+36\right] \\
&= -(4+\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
&= -(\lambda+4)(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

Daher sind die Eingenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_{2,3} = 2$

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 1

Wir berechnen zuerst die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -4$
Dafür lösen wir das Gleichungssystem $(A - \lambda_1 E_3)\vec{u} = \vec{0}$, d.h
$(A + 4E_3)\vec{u} = \vec{0}$ Wir bekommen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt dass, $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 1

Jetzt bestimmen wir eine die Eingenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{2,3} = 2$. Dafür lösen wir das Gleichungssystem $(A - \lambda_{2,3}E_3)\vec{u} = \vec{0}$, d.h $(A + 2E_3)\vec{u} = \vec{0}$ Wir bekommen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt dass, $u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

(b) Ist A diagonalisierbar?

Nein, da zu den doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3}$ bekommen wir nur 1 Eigenvektor. Damit haben wir nur noch 2 linear unabhängige Eigenvektoren. Somit existiert keine Basis aus $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 2

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn Ja, diagonalisieren Sie denn die Matrix A, (d.h. bestimmen Sie eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an).

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 2

Charakteristisches Polynom von A.

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)\ .$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 2

Eigenvektoren von A.

Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems $(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0}$ für $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=2$.

Für $\lambda_1=-1$

$$(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0} \Longleftrightarrow (A+E)\vec{u}=\vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}(1')\\(2')=2(1)+(2)\\(3')\end{array}$$

Man kann schon wieder feststellen, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Man setze $z=\mu$ und $y=\gamma$.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Aufgabe 2

$$(1') \rightsquigarrow -x - 2\gamma + \mu = 0 \Longrightarrow x = -2\gamma + \mu \ .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass für die Eigenwert $\lambda = -1$ erhält man die Eigenvektoren $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Genauso erhält man für die Eigewert $\lambda = 2$ den Eingevektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

Für $\lambda = -1$ erhält man die Eigenvektoren $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\lambda = 2$ den Eingevektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist die Matrix gestaltet aus der Eigenvektoren. Die entsprechende Diagonalmatrix D erhält die Eigenwerte in der Diagonale.

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$