

Numerik für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Werte $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_F$ für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und den Spektralradius der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$M_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1 \},$$

$$M_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \},$$

$$M_\infty = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty = 1 \}.$$

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit

$$\mathbf{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}, \quad i = 1, 2$$

wobei

$$m_1 + m_2 = n$$

und

$$\det \mathbf{A}_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2$$

gilt.

Man zeige, dass \mathbf{A} invertierbar ist und bestimme eine Blockdarstellung der Inversen \mathbf{A}^{-1} .

b) Unter Benutzung geeigneter Blockbildungen berechne man die Inversen von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Allgemeiner Hinweis:

Ein lineares und zur regulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konsistentes Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}_m = \phi(\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{b}) = \mathbf{M}\mathbf{x}_{m-1} + \mathbf{N}\mathbf{b}, \quad m = 1, 2, \dots$$

konvergiert genau dann für einen beliebigen Startvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegen die Lösung $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wenn

$$\rho(\mathbf{M}) < 1$$

gilt.

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8} \cos \frac{\pi}{4} & \frac{7}{8} \sin \frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8} \sin \frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8} \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_n + \mathbf{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

für beliebigen Startvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| > 1$$

existiert. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch.

Abgabe: Montag, 7.6.10 bis 16:00 Uhr in einem Abgabeschrank im INCON-Gebäude

Besprechung: Montag, 14.6.10