

# Begleitmaterial zur Vorlesung Numerik II

Andreas Meister

Universität Kassel, AG Analysis und Angewandte Mathematik

## Numerik I

- 1 Grundlagen der linearen Algebra
- 2 Lineare Gleichungssysteme
- 3 Interpolation

## Numerik II

- 1 Numerische Integration
- 2 Nichtlineare Gleichungen
- 3 Lineare Ausgleichsprobleme
- 4 Eigenwertprobleme

## Numerik I

- 1 Grundlagen der linearen Algebra
- 2 Lineare Gleichungssysteme
- 3 Interpolation

## Numerik II

- 1 Numerische Integration
- 2 Nichtlineare Gleichungen
- 3 Lineare Ausgleichsprobleme
- 4 Eigenwertprobleme

## Definition 1.1:

Die Zahl  $r \in \mathbb{N}_0$  heißt Genauigkeitsgrad der Quadraturformel  $I_n$ , wenn

$$I_n(x^\nu) = I(x^\nu) \quad \text{für } \nu = 0, \dots, r \quad (1.0.5)$$

und

$$I_n(x^{r+1}) \neq I(x^{r+1})$$

gilt. Der Genauigkeitsgrad einer Quadraturformel  $I_n$  ist mindestens von der Ordnung  $r$ , wenn (1.0.5) erfüllt ist.

## Lemma 1.2: (Eigenschaften der Quadraturformeln)

Sei  $I_n$  durch (1.0.4) gegeben, dann gelten

(a)  $I_n(\alpha f + \beta g) = \alpha I_n(f) + \beta I_n(g)$ ,  $\forall f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(b)  $I_n$  besitzt den Genauigkeitsgrad  $r$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_n(p) = I(p) & \text{für alle Polynome } p \in \Pi_r \text{ und} \\ I_n(p) \neq I(p) & \text{für alle Polynome } p \in \Pi_{r+1} \setminus \Pi_r. \end{cases}$$

## Definition 1.3: (Interpolatorische Quadraturformel)

Zu gegebener Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $q_n \in \Pi_n$  das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu den Stützpunkten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n)) \in \mathbb{R}^2$  an paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ . Dann heißt

$$I_n(f) := \int_a^b q_n(x) dx$$

interpolatorische Quadraturformel.

## Merke:

Da für alle Polynome  $p \in \Pi_n$  stets  $p = q_n$  gilt, folgt

$$I_n(p) = \int_a^b q_n(x) dx = \int_a^b p(x) dx = I(p),$$

wodurch der Genauigkeitsgrad von  $I_n$  mindestens  $n$  ist.

## Satz 1.5:

Eine interpolatorische Quadraturformel besitzt die Gestalt

$$I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k) \quad (1.1.1)$$

mit

$$\sigma_k := \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} dt \quad (1.1.2)$$

und

$$t_j := \frac{x_j - a}{b - a}. \quad (1.1.3)$$

## Lemma 1.8:

Für die Gewichte  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln  $I_n$  gilt

$$\sigma_k = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

## Lemma 1.9:

Für die Gewichte  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln  $I_n$  gilt

$$\sigma_{n-k} = \sigma_k, \quad k = 0, \dots, n.$$



## Lemma 1.8:

Für die Gewichte  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln  $I_n$  gilt

$$\sigma_k = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

## Lemma 1.9:

Für die Gewichte  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln  $I_n$  gilt

$$\sigma_{n-k} = \sigma_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

## Satz 1.11: (Fehlerabschätzung)

Die interpolatorische Quadraturformel

$$I_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k)$$

besitze mindestens den Genauigkeitsgrad  $r \geq n$  und die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(r + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$|I(f) - I_n(f)| \leq c_r \frac{(b - a)^{r+2}}{(r + 1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(r+1)}(\xi)|,$$

mit

$$c_r = \int_0^1 \prod_{k=0}^r |t - t_k| dt,$$

wobei die paarweise verschiedenen Stützstellen  $t_{n+1}, \dots, t_r$  beliebig aus der Menge  $[0, 1] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$  gewählt werden dürfen.

## Lemma 1.13:

Sei  $n \in \mathbb{N}$  gerade,  $h = \frac{b-a}{n}$  und  $x_k = a + kh$  für  $k = 0, \dots, n$ . Für die Funktion

$$F(x) := \int_a^x \prod_{k=0}^n (y - x_k) dy, \quad x \in [a, b]$$

gilt

$$F(a) = F(b) = 0 \text{ und } F(x) > 0 \text{ für alle } x \in ]a, b[.$$

## Verlauf des Knotenpolynoms

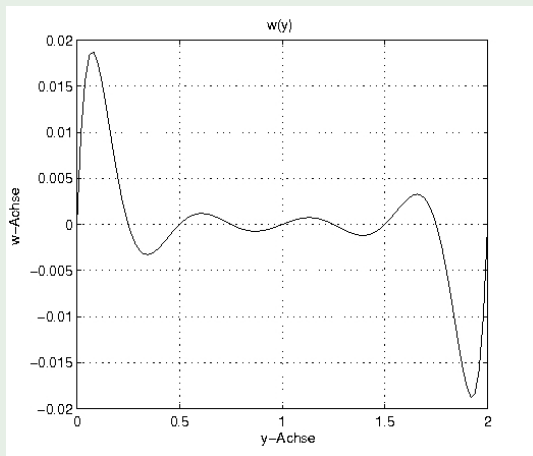


Abbildung: Knotenpolynoms auf  $[0, 2]$  für den Parameterwert  $n = 8$

## Definition 2.3:

Das durch die stetige Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegebene Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}_{m+1} = \Phi(\mathbf{x}_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

heißt lokal konvergent mit Grenzwert  $\bar{\mathbf{x}}$ , wenn ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass für Startvektoren

$$\mathbf{x}_0 \in B(\bar{\mathbf{x}}; \delta) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta\}$$

stets

$$\|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty \quad (2.0.6)$$

gilt.

## Definition 2.4:

Das Verfahren (2.0.5) heißt lokal konvergent von der Ordnung  $p \geq 1$  mit Grenzwert  $\bar{\mathbf{x}}$ , wenn ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass für Startvektoren  $\mathbf{x}_0 \in B(\bar{\mathbf{x}}; \delta)$  die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_{m+1} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq C \|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^p \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, \quad (2.0.7)$$

mit einer Konstanten  $0 \leq C = C(\mathbf{x}_0) < \infty$  gilt, wobei im Fall  $p = 1$  zusätzlich  $C < 1$  gefordert wird. Für  $p = 1$  beziehungsweise  $p = 2$  spricht man von linearer respektive quadratischer Konvergenz. Das Verfahren heißt lokal konvergent von genau der Ordnung  $p$ , falls es von der Ordnung  $p$  und keiner höheren Ordnung konvergent ist.

## Bemerkung 2.5:

- (a) Lineare Konvergenz impliziert lokale Konvergenz.
- (b) Ein Verfahren der Konvergenzordnung  $p > 1$  besitzt für jedes  $1 \leq q < p$  formal auch die kleinere Konvergenzordnung.
- (c) Je höher die Konvergenzordnung ist, desto schnellere lokale Konvergenzgeschwindigkeit darf erwartet werden, da für  $0 < q < p$  und  $\mathbf{x}_m$  nahe genug am Grenzelement  $\bar{\mathbf{x}}$  stets

$$\|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^p \ll \|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^q$$

gilt.

## Bemerkung 2.5:

- (a) Lineare Konvergenz impliziert lokale Konvergenz.
- (b) Ein Verfahren der Konvergenzordnung  $p > 1$  besitzt für jedes  $1 \leq q < p$  formal auch die kleinere Konvergenzordnung.
- (c) Je höher die Konvergenzordnung ist, desto schnellere lokale Konvergenzgeschwindigkeit darf erwartet werden, da für  $0 < q < p$  und  $\mathbf{x}_m$  nahe genug am Grenzelement  $\bar{\mathbf{x}}$  stets

$$\|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^p \ll \|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^q$$

gilt.



## Bemerkung 2.5:

- (a) Lineare Konvergenz impliziert lokale Konvergenz.
- (b) Ein Verfahren der Konvergenzordnung  $p > 1$  besitzt für jedes  $1 \leq q < p$  formal auch die kleinere Konvergenzordnung.
- (c) Je höher die Konvergenzordnung ist, desto schnellere lokale Konvergenzgeschwindigkeit darf erwartet werden, da für  $0 < q < p$  und  $\mathbf{x}_m$  nahe genug am Grenzelement  $\bar{\mathbf{x}}$  stets

$$\|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^p \ll \|\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}\|^q$$

gilt.

## Satz 2.6:

Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Fixpunkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  gegeben und  $\phi$  in  $\bar{x}$   $p$ -mal differenzierbar ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Weiter gelte

$$|\phi'(\bar{x})| < 1, \quad \text{falls } p = 1$$

respektive

$$\phi^{(k)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, p-1, \quad \text{falls } p \geq 2,$$

dann ist das Verfahren  $x_{m+1} = \phi(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$  lokal konvergent von der Ordnung  $p$  bezüglich  $\bar{x}$ . Gilt zudem  $\phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0$ , so liegt die genaue lokale Konvergenzordnung  $p$  bezüglich  $\bar{x}$  vor.

## Satz 2.8:

Die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze die Nullstelle  $x_* \in \mathbb{R}$  und sei in einer Umgebung von  $x_*$  hinreichend oft differenzierbar. Dann gelten

- (a) Das Newton-Verfahren konvergiert mindestens lokal quadratisch bezüglich  $x_*$ , falls

$$F'(x_*) \neq 0 \quad (*)$$

gilt.

- (b) Das Newton-Verfahren konvergiert lokal von mindestens dritter Ordnung bezüglich  $x_*$ , falls neben (\*) auch

$$F''(x_*) = 0$$

gilt.

## Definition 3.2:

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$ . Dann bezeichnen wir für gegebenen Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  die Aufgabenstellung

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \stackrel{!}{=} \min$$

als lineares Ausgleichsproblem.

## Definition 3.4:

Es sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m > n$ , und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Dann nennt man  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  eine *Ausgleichslösung* von  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , wenn

$$\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Wir sagen  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  ist *Optimallösung* von  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , wenn  $\tilde{\mathbf{x}}$  eine Ausgleichslösung ist, deren euklidische Norm minimal ist.

## Satz 3.5:

Ein Vektor  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  ist genau dann Ausgleichslösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|_2 \stackrel{!}{=} \min, \quad (3.0.5)$$

wenn  $\hat{\mathbf{x}}$  den sogenannten Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.0.6)$$

genügt.

## Beispiel 3.11

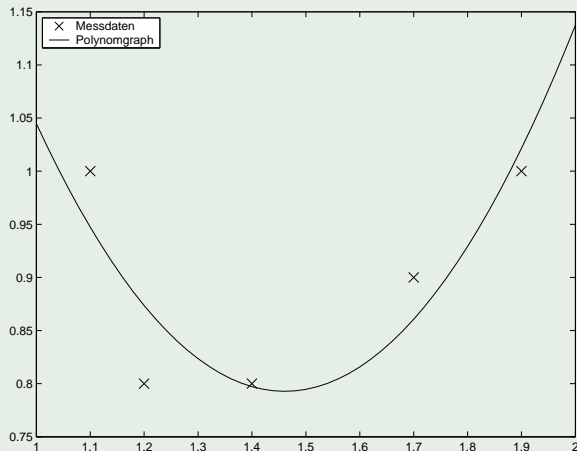


Abbildung: Lösung zum Beispiel 3.11

## Satz 3.16:

Zu jeder Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang} \mathbf{A} = n < m$  existiert eine orthogonale Matrix  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  derart, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{UR} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

gilt, wobei  $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reguläre rechte obere Dreiecksmatrix darstellt.

## Satz 3.19:

Zu jeder Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang} \mathbf{A} = r < n \leq m$  existieren zwei orthogonale Matrizen  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  derart, dass

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

gilt, wobei  $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  eine reguläre obere Dreiecksmatrix darstellt.



## Satz und Definition 3.20:

Zu jeder Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang} \mathbf{A} = r \leq n \leq m$  existieren zwei orthogonale Matrizen  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  derart, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.2.7)$$

mit einer Diagonalmatrix  $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , die reelle, nichtnegative Diagonalelemente

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 \quad (3.2.8)$$

aufweist. Die Darstellung (3.2.7) wird als Singulärwertzerlegung und die in (3.2.8) aufgeführte Diagonalelemente als Singulärwerte bezeichnet.

## Satz 4.2: (Satz von Gerschgorin)

Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , dann gilt mit den Kreisen

$$K_i := \left\{ \xi \mid |\xi - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

die Aussage

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

## Satz 4.4:

Jede irreduzible diagonaldominante Tridiagonalmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist regulär, falls für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Ungleichung

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

gilt.

## Definition 4.5:

Unter dem Wertebereich einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  versteht man die Menge aller Rayleigh-Quotienten

$$\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{A}) &= \left\{ \xi = \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \\ &= \left\{ \xi = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}. \end{aligned}$$

## Lemma 4.7:

Für den Wertebereich einer Matrix  $\mathbf{A}$  gelten folgende Eigenschaften:

- (a)  $\mathcal{W}(\mathbf{A})$  ist zusammenhängend für jede Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .
- (b) Ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch, dann gilt:

$$\mathcal{W}(\mathbf{A}) = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}$$

mit  $\lambda_1 = \min\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$  und  $\lambda_n = \max\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$ .

- (c) Ist  $\mathbf{A}$  schieferhermitesch, d. h.  $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$ , dann ist  $\mathcal{W}(\mathbf{A})$  ein rein imaginäres Intervall, nämlich die konvexe Hülle aller Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ .

## Satz 4.8:(Satz von Bendixson)

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dann gilt

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset R = \mathcal{W} \left( \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2} \right) + \mathcal{W} \left( \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^*}{2} \right),$$

wobei  $R \subset \mathbb{C}$  ein Rechteck darstellt.

## Beispiel 4.9

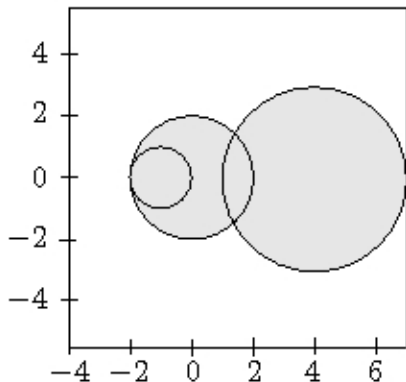


Abbildung: Gerschgorinkreise zur Matrix  $A$ .

## Beispiel 4.9

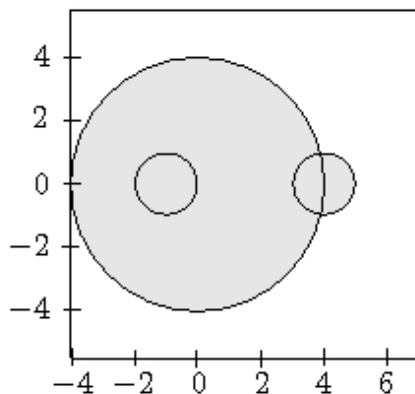


Abbildung: Gerschgorinkreise zur Matrix  $A^*$ .



## Beispiel 4.9

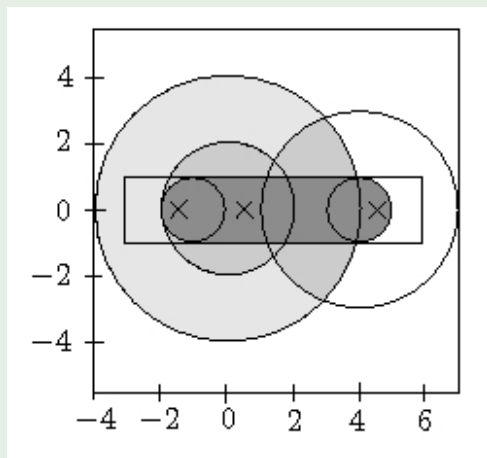


Abbildung: Eigenwerteinschließung und Eigenwertdarstellung.

## Satz 4.11:

Die Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  habe die Eigenwerte  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  mit  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ . Ferner sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  ein linker Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda_1$  mit  $\|\mathbf{y}\| = 1$ . Ist  $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\mathbf{z}^{(0)}\| = 1$  und  $\mathbf{y}^T \mathbf{z}^{(0)} \neq 0$  Startvektor der Potenzmethode, dann gilt

$$\|\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}\| - |\lambda_1| = \mathcal{O} \left( \left( \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k \right), \quad k \rightarrow \infty$$

und es existiert ein rechter Eigenvektor  $\mathbf{v}$  von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda_1$  mit  $\|\mathbf{v}\| = 1$  und

$$\|\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{v}\| = \mathcal{O} \left( \left( \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k \right), \quad k \rightarrow \infty, \text{ falls } \lambda_1 > 0$$

$$\|\mathbf{z}^{(k)} - (-1)^k \mathbf{v}\| = \mathcal{O} \left( \left( \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k \right), \quad k \rightarrow \infty, \text{ falls } \lambda_1 < 0.$$

## Lemma 4.13:

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und die Matrizen  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k$  und  $\mathbf{R}_k$  gemäß (\*) bestimmt, dann gelten

$$(a) \quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^* \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k$$

$$(b) \quad \mathbf{A}_{k+1} = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k)^* \mathbf{A} (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_k)$$

$$(c) \quad \mathbf{A}^{k+1} = \prod_{j=0}^k \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k \mathbf{R}_{k-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_0$$

## Lemma 4.16:

Sei  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)^T \in \mathbb{C}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^k$  sowie  $\mathbf{z} \notin \text{span}\{\mathbf{e}_1\}$ , dann gilt mit

$$\mathbf{v} := \frac{\mathbf{z} - \alpha \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{z} - \alpha \mathbf{e}_1\|_2}, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{z_1}{|z_1|} \|\mathbf{z}\|_2 & , \text{ falls } z_1 \neq 0 \\ \|\mathbf{z}\|_2 & , \text{ falls } z_1 = 0 \end{cases}$$

und

$$\mathbf{P} := \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

die Eigenschaft

$$\mathbf{P}\mathbf{z} = \alpha \mathbf{e}_1.$$

## Satz 4.17:

Jede Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  kann unter Verwendung von  $(n - 2)$  Householder-Transformationen auf obere Hessenbergform transformiert werden. D. h. mit  $(n - 2)$  Householder-Matrizen  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-2}$  kann eine unitäre Matrix  $\mathbf{Q}$  derart definiert werden, dass

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

eine Hessenbergmatrix darstellt.

## Satz 4.18:

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

und

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

sowie

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren. Ferner existiere eine  $LR$ -Zerlegung von  $\mathbf{X}^{-1}$ , dann konvergiert die Folge der Matrizen  $\mathbf{A}_k$  des  $QR$ -Verfahrens gegen eine rechte obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{R}$  für dessen Diagonale  $\text{diag}(\mathbf{R})$  gilt

$$\text{diag}(\mathbf{R}) = \text{diag}(\mathbf{D}).$$

## Bemerkung 4.19:

Die Konvergenz des  $QR$ -Verfahrens kann durch sogenannte Shifts, festgelegt durch eine Folge komplexer Zahlen  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , beeinflusst werden. Wir betrachten dann das Verfahren in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_k - \mu_k \mathbf{I} &= \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k + \mu_k \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Ausgehend von der Matrix  $\mathbf{A}_k = \left( a_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1,\dots,n}$  wird  $\mu_k = a_{nn}^{(k)}$  gewählt oder  $\mu_k$  als der Eigenwert von

$$\begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(k)} & a_{n-1,n}^{(k)} \\ a_{n-1,n}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

festgelegt, der  $a_{nn}^{(k)}$  am nächsten ist.