

Numerik I für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

a) Welche der im folgenden gegebenen Vektoren sind linear abhängig?

$$(i) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Man bestimme das $\alpha \in \mathbb{R}$, für das die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Für dieses α stelle man \mathbf{v}_j ($j = 1, 2, 3$) jeweils als Linearkombination der anderen Vektoren \mathbf{v}_k ($k \neq j$) dar.

Aufgabe 2

Für welche reellen Werte α und β besitzt das System

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + \alpha x_4 &= \beta \end{aligned}$$

- a) eine eindeutige Lösung (man berechne diese),
- b) mehrere Lösungen (man gebe die allgemeine Lösung an),
- c) keine Lösung.
- d) Man bestimme die Determinante der Systemmatrix \mathbf{A} .

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit

$$\mathbf{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}, \quad i = 1, 2$$

wobei

$$m_1 + m_2 = n$$

und

$$\det \mathbf{A}_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2$$

gilt.

Man zeige, dass \mathbf{A} invertierbar ist und bestimme eine Blockdarstellung der Inversen \mathbf{A}^{-1} .

b) Unter Benutzung geeigneter Blockbildungen berechne man die Inversen von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$M_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1 \},$$

$$M_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \},$$

$$M_\infty = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty = 1 \}.$$

Besprechung: Dienstag, 13. Dezember 2004