Numerik I für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Werte $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{A}\|_F$ für die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren auf Konvergenz.

Aufgabe 3

Im folgenden Schema sind die x_i so zu bestimmen, dass alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen den Wert 15 haben. Man stelle für die Unbekannten ein lineares Gleichungssystem auf und löse es. Wie viele Lösungen gibt es, bei denen in dem „magischen Quadrat“ alle natürlichen Zahlen von 1 bis 9 vorkommen?

x_1	9	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Allgemeiner Hinweis:
Ein lineares und zur regulären Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konsistentes Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_m = \phi(\boldsymbol{x}_{m-1}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{m-1} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{b}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

konvergiert genau dann für einen beliebigen Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegen die Lösung $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wenn

$$\rho(\boldsymbol{M}) < 1$$

gilt.

Aufgabe 4
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} & \frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für beliebigen Starvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x} = (0,0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\| > 1$$

existiert. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch.

Besprechung: **Dienstag, 20. Dezember 2004**