

Numerik I für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ 8 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie unter Verwendung dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 5 \\ 29 \\ 99 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass die Matrix \mathbf{A} regulär ist.
- Zeigen Sie, dass keine LR-Zerlegung der Matrix \mathbf{A} existiert.
- Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix \mathbf{P} derart, dass \mathbf{PA} eine LR-Zerlegung besitzt.
- Berechnen Sie mittels der LR-Zerlegung von \mathbf{PA} die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ gilt. Erfüllen die Vektoren zudem die Bedingung $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$, so heißen die Vektoren orthonormal.

- Welche der folgenden Vektorenpaare sind orthogonal resp. orthonormal?

(i) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -28 \\ 14 \end{pmatrix}.$

(ii) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von c sind die Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} orthogonal resp. orthonormal?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie unter Verwendung dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Besprechung: Dienstag, den 18. Januar 2005