Numerik I für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Werte $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{A}\|_F$ für die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und den Spektralradius der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1\right\}, \\ M_2 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\right\}, \\ M_\infty &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}, \quad i = 1, 2$$

wobei

$$m_1 + m_2 = n$$

und

$$\det \boldsymbol{A}_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2$$

gilt.

Man zeige, dass $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist und bestimme eine Blockdarstellung der Inversen $\boldsymbol{A}^{-1}$.

b) Unter Benutzung geeigneter Blockbildungen berechne man die Inversen von

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
Allgemeiner Hinweis:
Ein lineares und zur regulären Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konsistentes Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_m = \phi(\boldsymbol{x}_{m-1}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{m-1} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{b}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

konvergiert genau dann für einen beliebigen Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegen die Lösung $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wenn

$$\rho(\boldsymbol{M}) < 1$$

gilt.

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} & \frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für beliebigen Starvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x} = (0, 0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\| > 1$$

existiert. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch.

Abgabe: 20.12.05 in der Vorlesung
Besprechung: 12.1.06