

# Begleitmaterial zur Vorlesung Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Andreas Meister

Universität Kassel, AG Analysis und Angewandte Mathematik

## Allgemeiner Näherungsverlauf

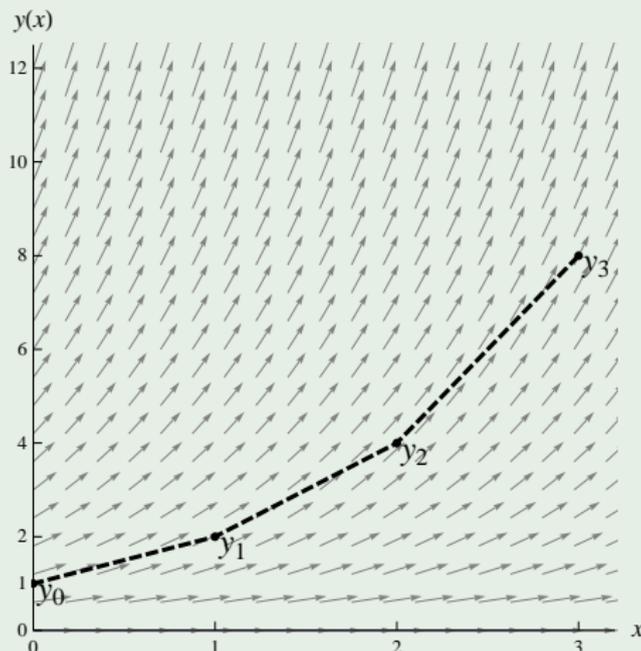
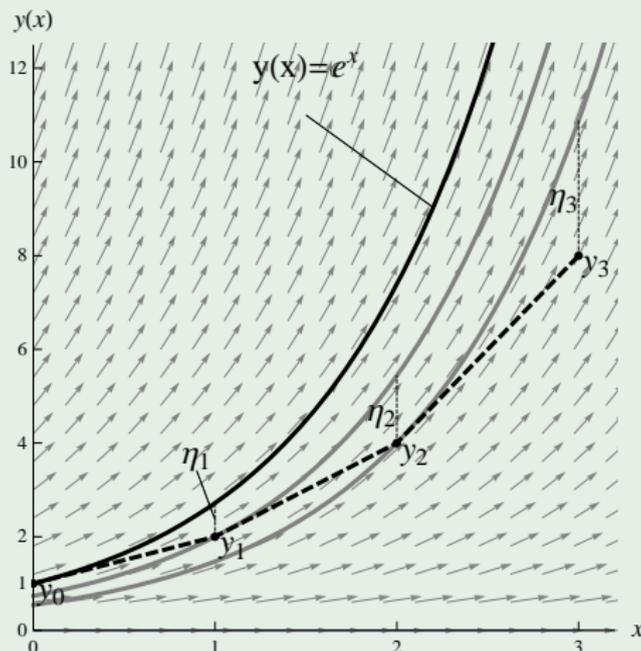


Abbildung: Richtungsfeld zur Dgl  $y'(x) = y(x)$  und Näherungsverlauf des Euler-Verfahrens

## Lokaler Diskretisierungsfehler



**Abbildung:** Lokaler Diskretisierungsfehler des Euler-Verfahrens zur Dgl  $y'(x) = y(x)$

## Globaler Diskretisierungsfehler

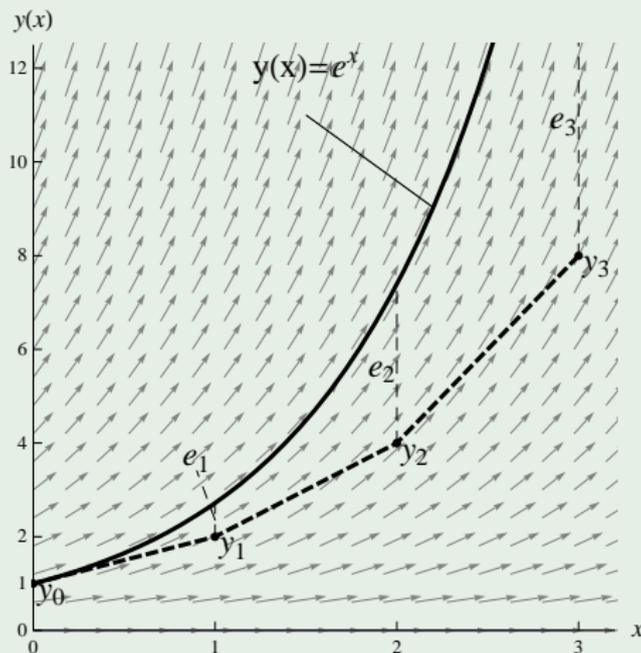


Abbildung: Globaler Diskretisierungsfehler des Euler-Verfahrens zur Dgl  $y'(x) = y(x)$

## Runge-Verfahren

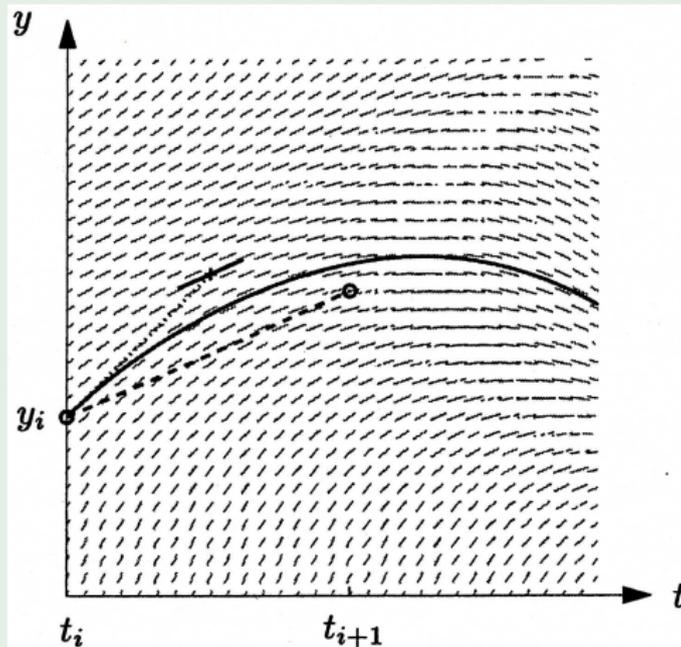


Abbildung: Auswertungsstellen zum Runge-Verfahren

## Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

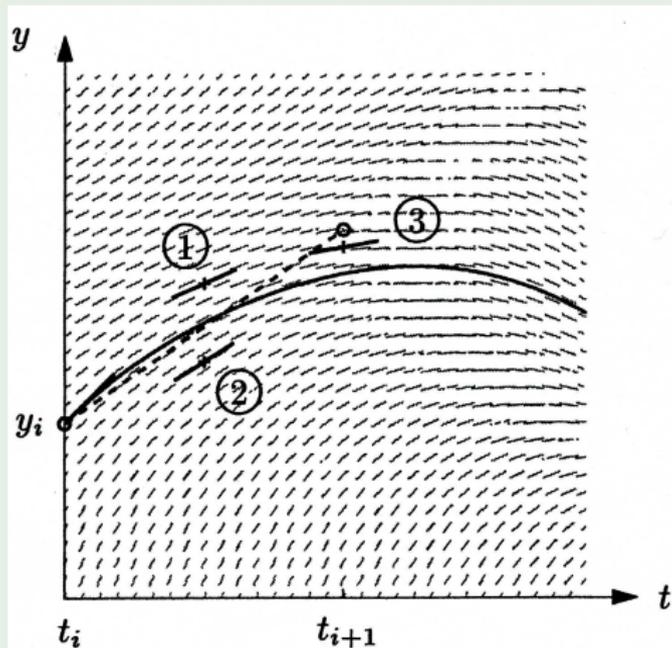


Abbildung: Auswertungsstellen zum klassischen Runge-Kutta-Verfahren

## Heun-Verfahren

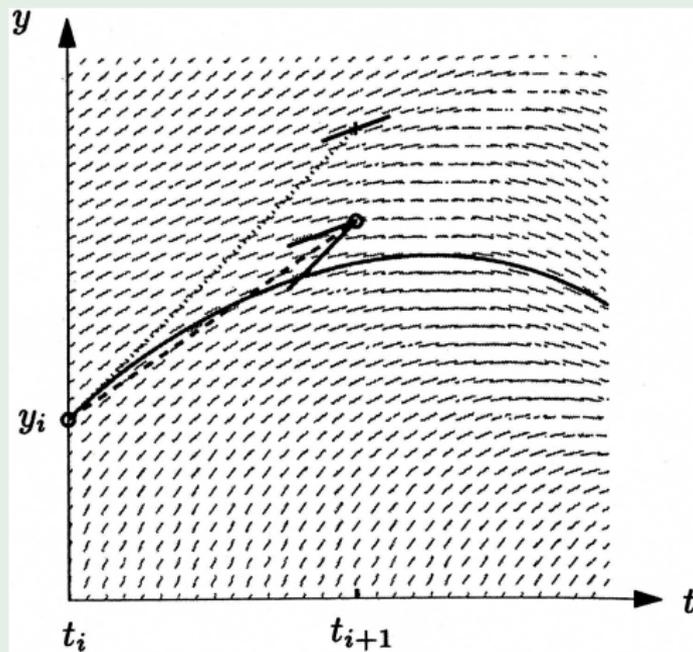


Abbildung: Auswertungsstellen zum Prädiktor-Korrektor-Verfahren

## Konvergenzordnung

$\Delta t$	Euler-Verf. 1. Ord.	Runge-Verf. 2. Ord.	Runge-Kutta Verfahren 3. Ord. (2.17)	Runge-Kutta Verfahren 4. Ord.
0.1	$2.6985e^{-05}$	$5.4625e^{-05}$	$4.3655e^{-06}$	$5.8558e^{-07}$
0.05	$2.4323e^{-05}$	$6.8266e^{-06}$	$4.6063e^{-07}$	$2.8156e^{-08}$
0.02	$1.4683e^{-05}$	$8.6556e^{-07}$	$2.5703e^{-08}$	$6.1962e^{-10}$
0.01	$8.4551e^{-06}$	$2.0438e^{-07}$	$3.0632e^{-09}$	$3.6834e^{-11}$
0.005	$4.5363e^{-06}$	$4.9815e^{-08}$	$3.7382e^{-10}$	$2.2451e^{-12}$
0.002	$1.8926e^{-06}$	$7.8573e^{-09}$	$2.3584e^{-11}$	$5.6453e^{-14}$
0.001	$9.5968e^{-07}$	$1.9553e^{-09}$	$2.9369e^{-12}$	$4.9959e^{-16}$

## Konvergenzordnung

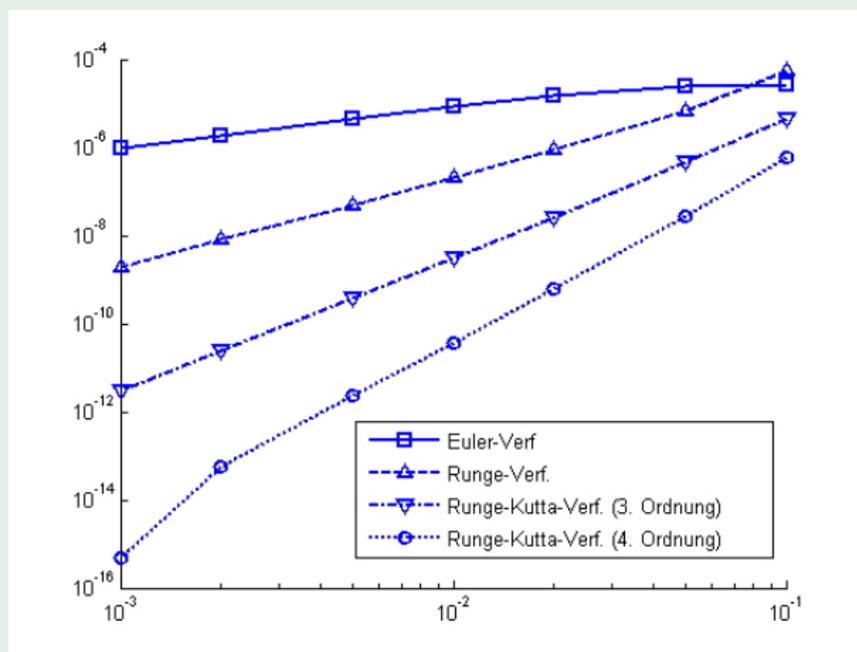


Abbildung: Konvergenzverhalten unterschiedlicher Runge-Kutta-Verfahren

## Stabilität

$t_i$	Näherungen $y_i$ für			Exakte Werte
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.025$	$y(t_i)$
0	1	1	1	1
0.1	1.1052	1.1052	1.1052	1.1052
0.2	1.2214	1.2214	1.1108	1.2214
0.3	1.3499	1.3495	0.9676	1.3499
0.4	1.4915	1.4823	-223.4788	1.4918
0.5	1.6499	1.4240	.	1.6487
0.6	1.8163	-3.4665	.	1.8221
0.7	2.0410	-122.4522	.	2.0138
0.8	2.0970	.	.	2.2255
0.9	3.0643	.	.	2.4596
1.0	-0.1272	.	.	2.7183

## Modellproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= k(c_0 - y(t)), & t \in \mathbb{R}_0^+ \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

mit  $k = 0.3$  und  $c_0 = 10$ .

## Lösung

$$y(t) = c_0(1 - e^{-kt})$$

## Gruppe A: Explizite Einschrittverfahren

Verfahrensname	Ordnung $p$	Abkürzung
Explizites Euler-Verfahren	1	EE
Runge-Verfahren	2	Runge
Heun-Verfahren	2	Heun
3-stufiges Runge-Kutta-Verfahren	3	ERK3
Klassisches Runge-Kutta-Verfahren	4	ERK4

## Gruppe B: Implizite Einschrittverfahren

Verfahrensname	Ordnung $p$	Abkürzung
Implizites Euler-Verfahren	1	IE
Implizite Mittelpunktregel	2	IM
Implizite Trapezregel	2	IT
SDIRK-Verfahren	3	SDIRK
Implizites Verfahren nach Hammer und Hollingsworth	4	IHH

## Gruppe C: Explizite Mehrschrittverfahren

Verfahrensname	Ordnung $p$	Abkürzung
Adams-Bashfort-Verfahren $m = 2$	2	AB2
Adams-Bashfort-Verfahren $m = 3$	3	AB3
Nyström-Verfahren $m = 2$	2	NYS2
Nyström-Verfahren $m = 3$	3	NYS3

## Gruppe D: Implizite Mehrschrittverfahren

Verfahrensname	Ordnung $p$	Abkürzung
Adams-Moulton-Verfahren $m = 2$	3	AM2
Adams-Moulton-Verfahren $m = 3$	4	AM3
Milne-Simpson-Verfahren $m = 2$	4	MS2
BDF(2)-Verfahren $m = 2$	2	BDF2
BDF(3)-Verfahren $m = 3$	3	BDF3

Fehlerverläufe für  $|e(5, \Delta t)| = |y(5) - y_{num}(5, \Delta t)|$

## Gruppe A: Explizite Einschrittverfahren

$\Delta t$	EE	Runge/Heun	ERK3	ERK4
1	$5.51 \cdot 10^{-1}$	$6.37 \cdot 10^{-2}$	$4.79 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-4}$
0.5	$2.63 \cdot 10^{-1}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$5.31 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$
0.1	$5.07 \cdot 10^{-2}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$	$3.86 \cdot 10^{-6}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$
0.05	$2.52 \cdot 10^{-2}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$4.76 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-9}$
0.01	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$5.04 \cdot 10^{-6}$	$3.77 \cdot 10^{-9}$	$2.27 \cdot 10^{-12}$

Fehlerverläufe für  $|e(5, \Delta t)| = |y(5) - y_{num}(5, \Delta t)|$

## Gruppe B: Implizite Einschrittverfahren

$\Delta t$	IE	IM/IT	SDIRK	IHH
1	$4.62 \cdot 10^{-1}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$6.39 \cdot 10^{-4}$	$3.79 \cdot 10^{-5}$
0.5	$2.41 \cdot 10^{-1}$	$6.29 \cdot 10^{-3}$	$7.62 \cdot 10^{-5}$	$2.36 \cdot 10^{-6}$
0.1	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$5.88 \cdot 10^{-7}$	$3.77 \cdot 10^{-9}$
0.05	$2.50 \cdot 10^{-2}$	$6.28 \cdot 10^{-5}$	$7.31 \cdot 10^{-8}$	$2.35 \cdot 10^{-10}$
0.01	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$2.51 \cdot 10^{-6}$	$5.83 \cdot 10^{-10}$	$3.81 \cdot 10^{-13}$

Fehlerverläufe für  $|e(5, \Delta t)| = |y(5) - y_{num}(5, \Delta t)|$

## Gruppe C: Explizite Mehrschrittverfahren

$\Delta t$	AB2	AB3	NYS2	NYS3
1	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$2.18 \cdot 10^{-2}$	$3.04 \cdot 10^{-2}$
0.5	$3.08 \cdot 10^{-2}$	$3.99 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$
0.1	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$5.95 \cdot 10^{-4}$	$7.90 \cdot 10^{-6}$
0.05	$3.13 \cdot 10^{-4}$	$4.22 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$	$1.40 \cdot 10^{-6}$
0.01	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$3.39 \cdot 10^{-8}$	$5.12 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-8}$

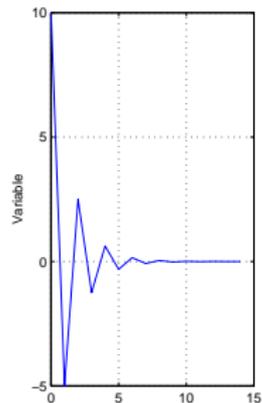
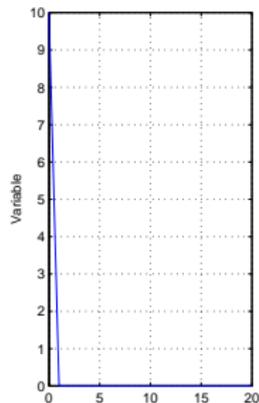
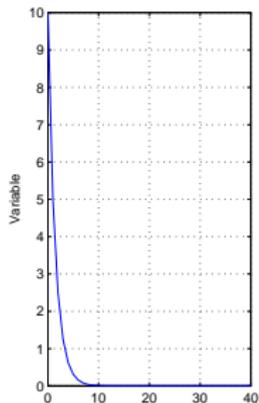
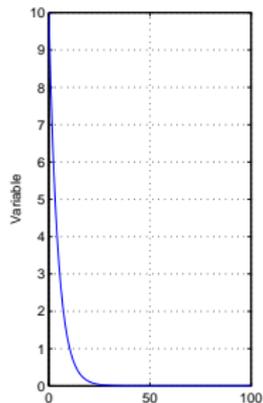
Fehlerverläufe für  $|e(5, \Delta t)| = |y(5) - y_{num}(5, \Delta t)|$

## Gruppe D: Implizite Mehrschrittverfahren

$\Delta t$	AM2	AM3	MS2	BDF2	BDF3
1	$3.45 \cdot 10^{-3}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$8.56 \cdot 10^{-2}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$
0.5	$4.50 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$
0.1	$3.73 \cdot 10^{-6}$	$6.94 \cdot 10^{-8}$	$1.75 \cdot 10^{-8}$	$9.96 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$
0.05	$4.67 \cdot 10^{-7}$	$4.41 \cdot 10^{-9}$	$1.02 \cdot 10^{-9}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$
0.01	$3.76 \cdot 10^{-9}$	$7.07 \cdot 10^{-12}$	$1.61 \cdot 10^{-12}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$2.26 \cdot 10^{-8}$

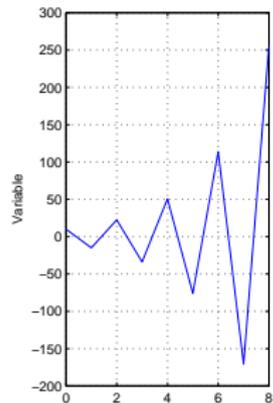
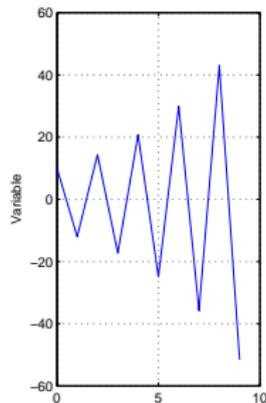
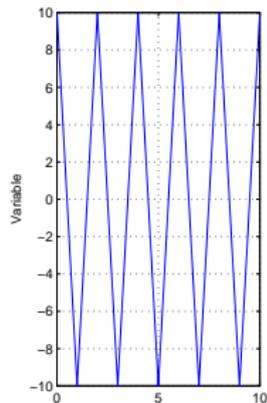
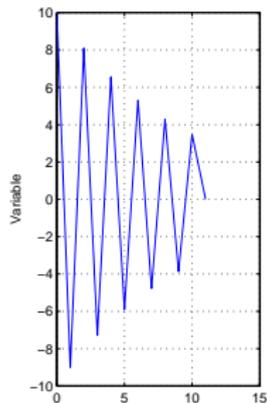
## Stabilität beim expliziten Euler-Verfahren

$$\Delta t = 0.2, 0.5, 1.0, 1.5$$



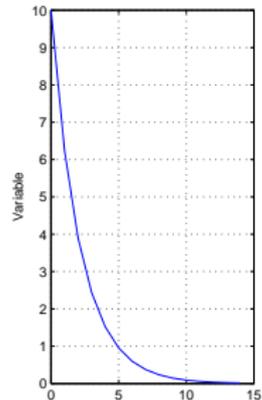
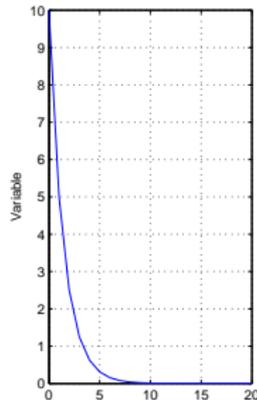
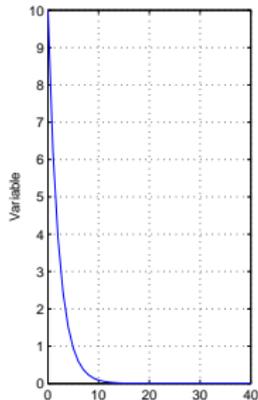
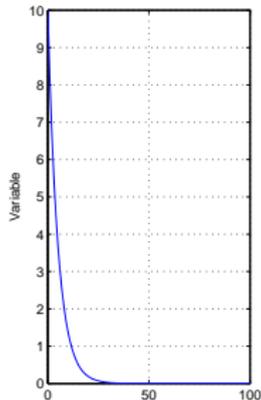
## Stabilität beim expliziten Euler-Verfahren

$$\Delta t = 1.9, 2.0, 2.2, 2.5$$



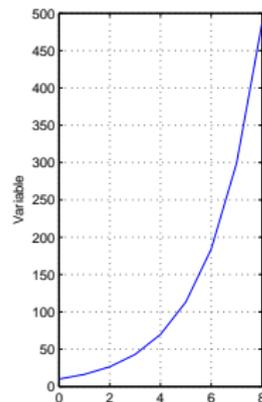
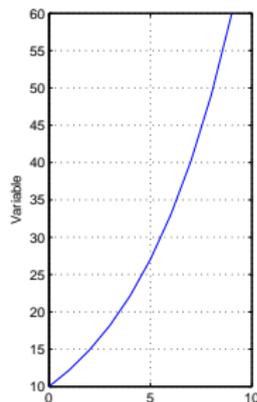
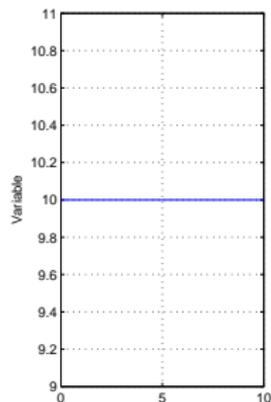
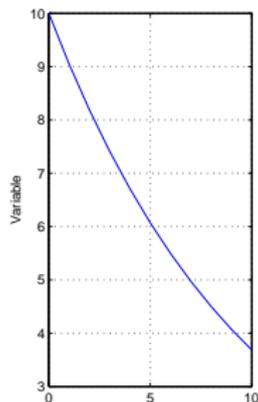
## Stabilität beim expliziten Runge-Verfahren

$$\Delta t = 0.2, 0.5, 1.0, 1.5$$



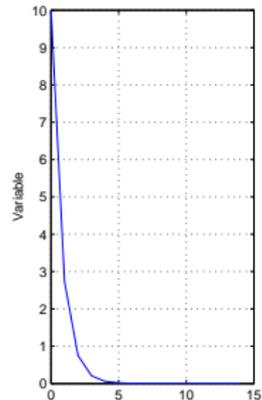
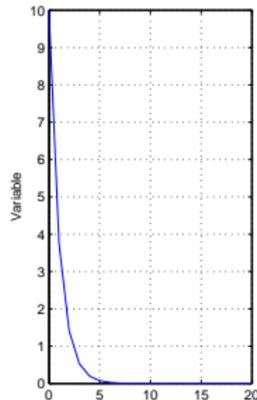
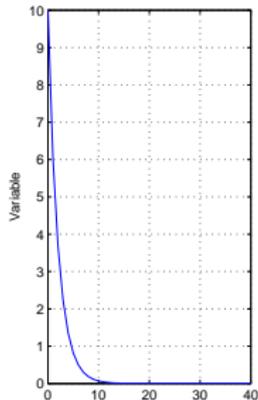
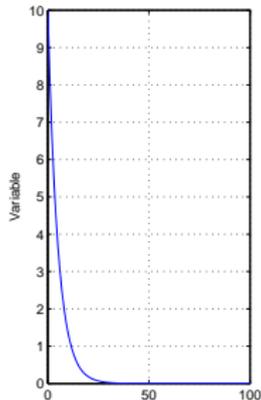
## Stabilität beim expliziten Runge-Verfahren

$$\Delta t = 1.9, 2.0, 2.2, 2.5$$



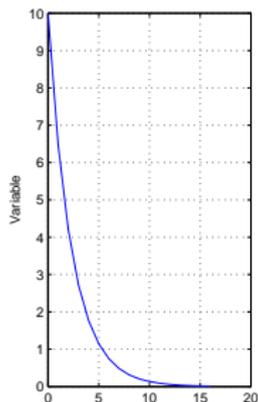
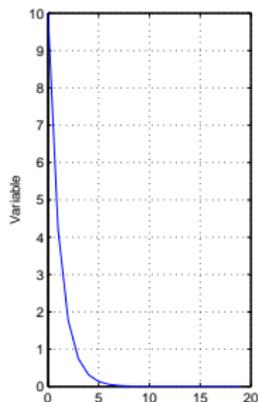
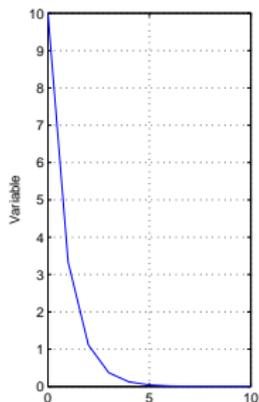
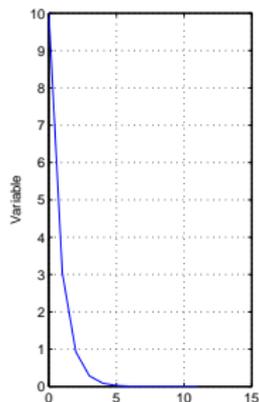
## Stabilität beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\Delta t = 0.2, 0.5, 1.0, 1.5$$



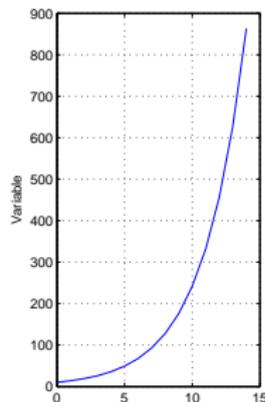
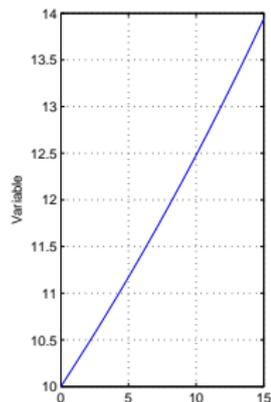
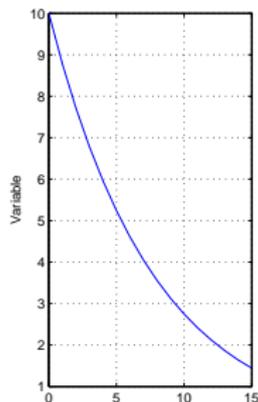
## Stabilität beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\Delta t = 1.9, 2.0, 2.2, 2.5$$

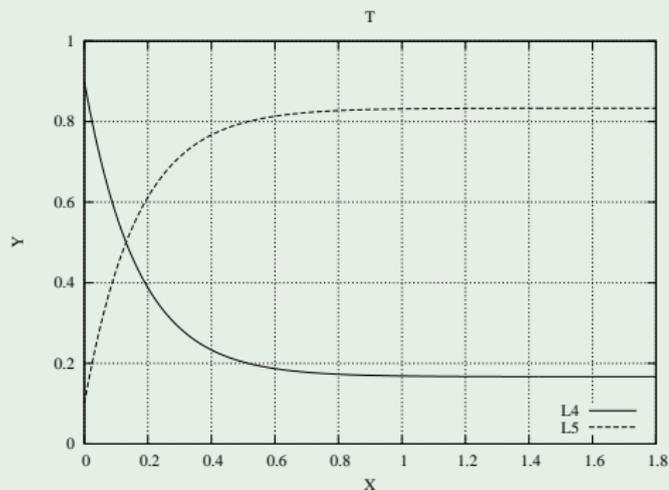


## Stabilität beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren

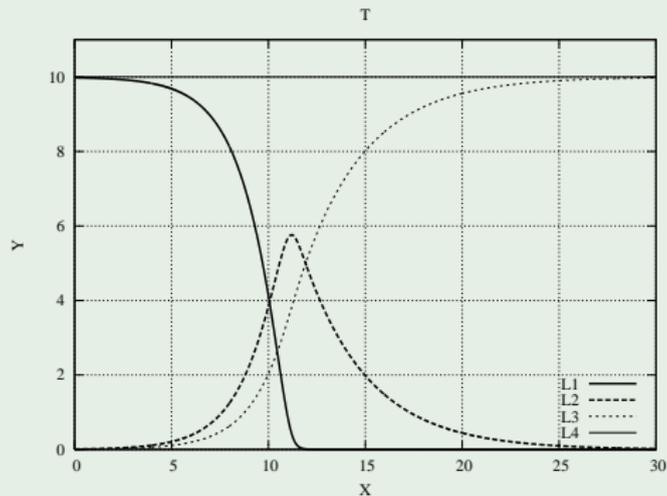
$$\Delta t = 2.7, 2.8, 3.0$$



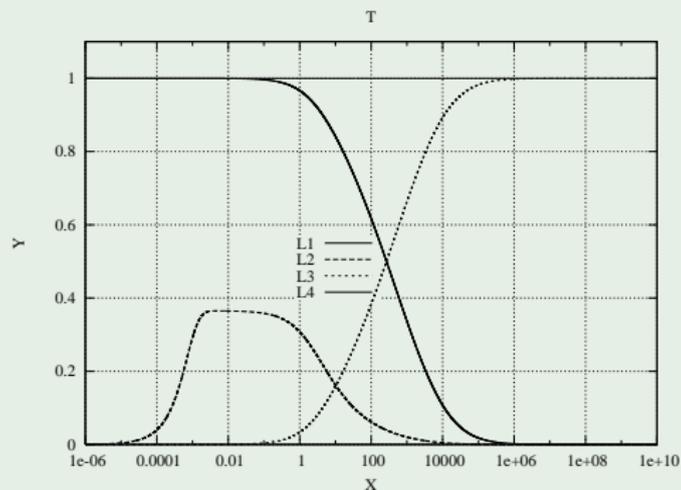
## Analytische Lösung des linearen Testproblems



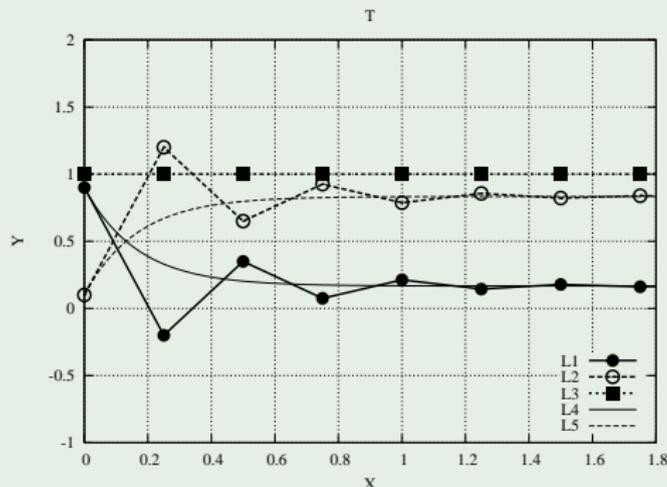
## Hochauflösende Lösung des nichtlinearen Testproblems



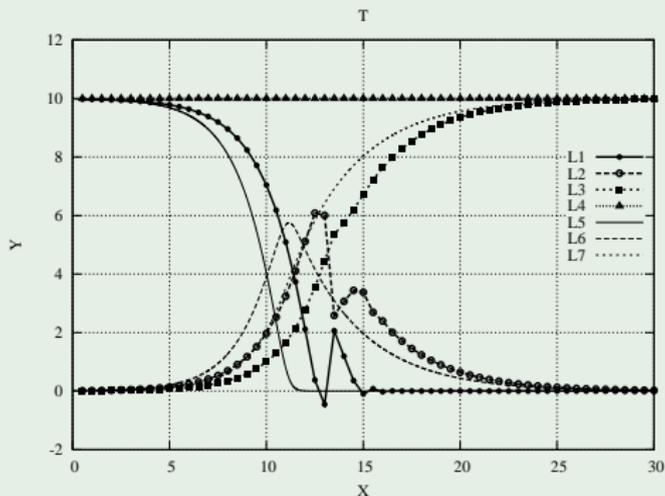
## Hochauflösende Lösung des Robertson Testfalls



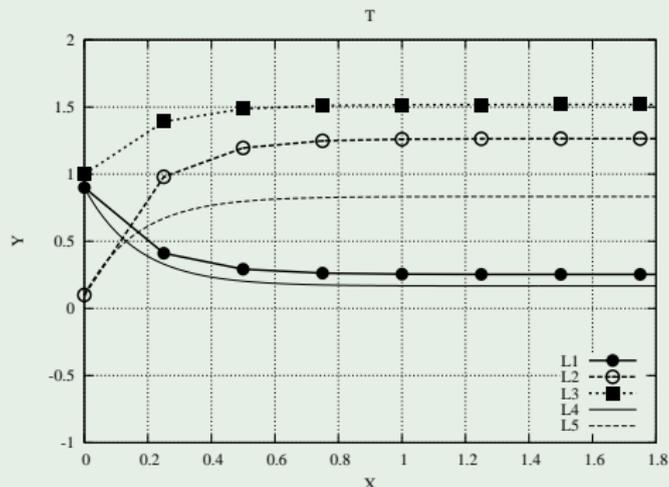
## Lösung des linearen Testproblems mittels Euler-Verfahren bei $\Delta t = 0.25$



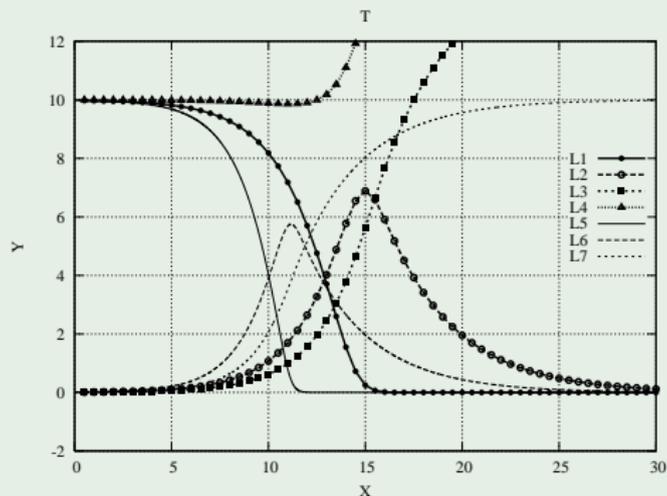
## Lösung des nichtlinearen Testproblems mittels Euler-Verfahren bei $\Delta t = 0.5$



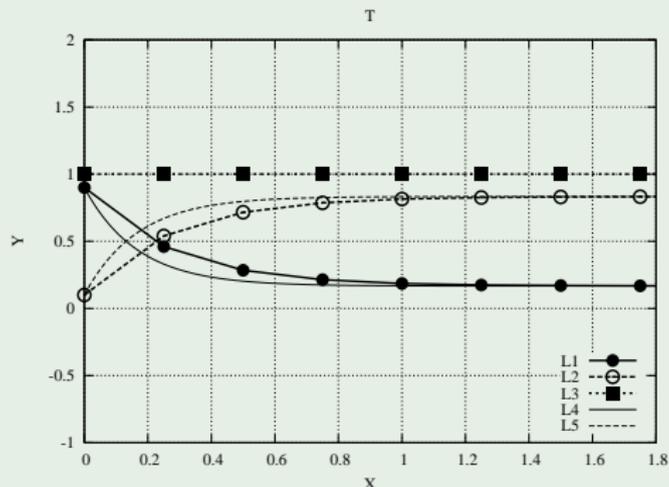
## Lösung des linearen Testproblems mittels Patankar-Verfahren bei $\Delta t = 0.25$



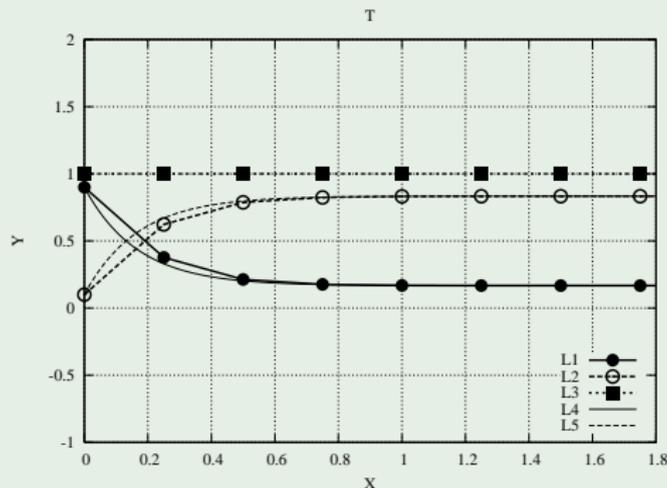
## Lösung des nichtlinearen Testproblems mittels Patankar-Verfahren bei $\Delta t = 0.5$



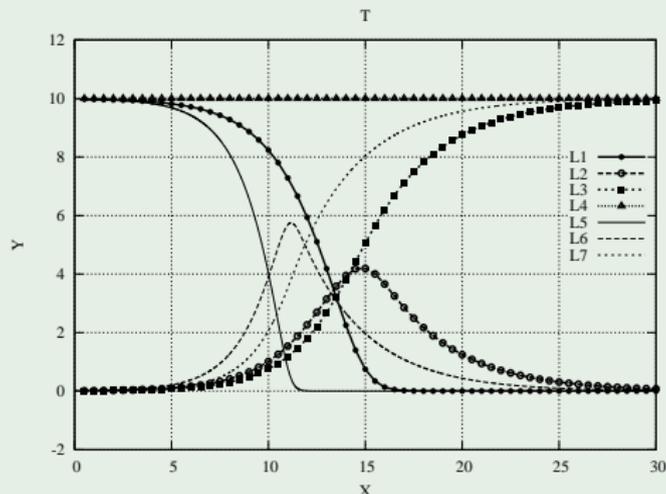
## Lösung des linearen Testproblems mittels modifiziertem Patankar-Verfahren bei $\Delta t = 0.25$



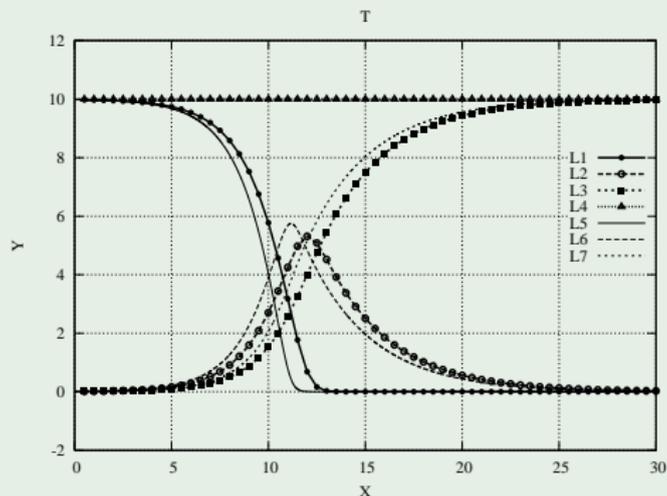
## Lösung des linearen Testproblems mittels modifiziertem Patankar-Runge-Kutta-Verfahren bei $\Delta t = 0.25$



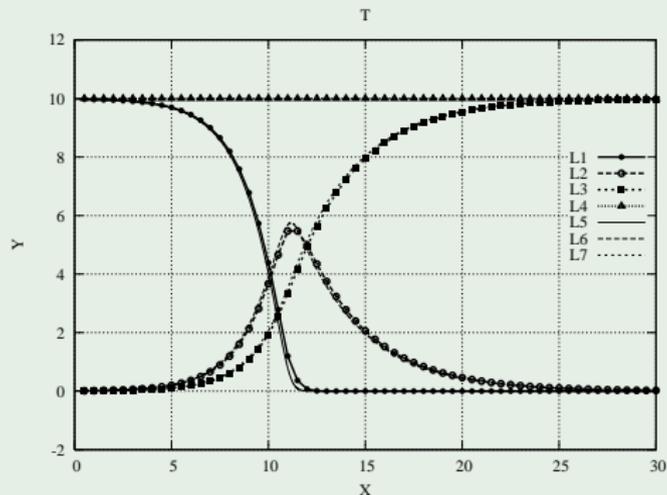
## Lösung des nichtlinearen Testproblems mittels modifiziertem Patankar-Verfahren bei $\Delta t = 0.5$



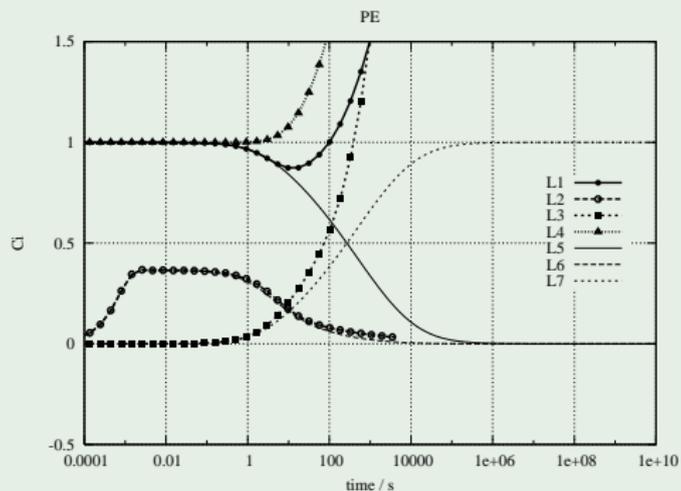
Lösung des nichtlinearen Testproblems mittels modifiziertem Patankar-Runge-Kutta-Verfahren bei  $\Delta t = 0.5$



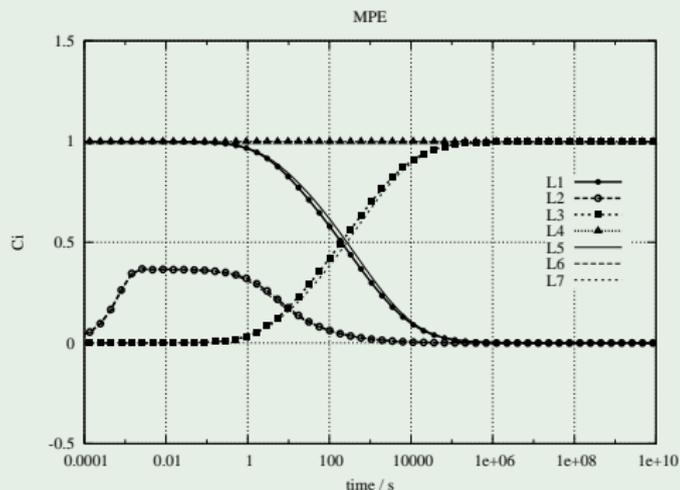
Lösung des nichtlinearen Testproblems mittels hybriden modifiziertem Patankar-Runge-Kutta-Verfahren bei  $\Delta t = 0.5$



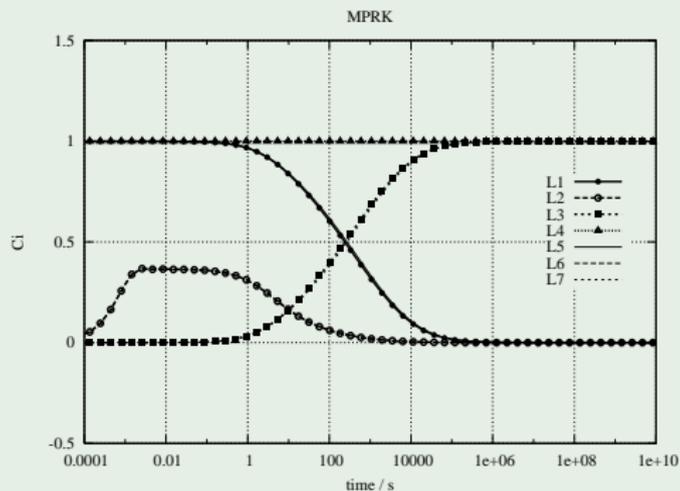
## Lösung des Robertson Problems mittels Patankar-Verfahren



## Lösung des Robertson Problems mittels modifiziertem Patankar-Verfahren



## Lösung des Robertson Problems mittels modifiziertem Patankar-Runge-Kutta-Verfahren



Lösung des RWP's  $y''(x) = y^3$  mit  $y(1) = \sqrt{2}$  und  $y(2) = \sqrt{2}/2$

$n$	$s_n$	$F(s_n)$
0	$0.000e + 00$	$3.616e + 00$
1	$2.000e + 00$	$8.167e + 01$
2	$-9.267e - 02$	$3.223e + 00$
3	$-1.787e - 01$	$2.890e + 00$
4	$-9.257e - 01$	$8.608e - 01$
5	$-1.243e + 00$	$2.806e - 01$
6	$-1.396e + 00$	$3.419e - 02$
7	$-1.417e + 00$	$1.420e - 03$
8	$-1.418e + 00$	$7.241e - 06$
9	$-1.418e + 00$	$1.534e - 09$

Lösung des RWPs  $y''(x) = y^3$  mit  $y(1) = \sqrt{2}$  und  $y(2) = \sqrt{2}/2$

