Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb
Dipl.-Math. Thomas Hennecke

WiSe 2009/2010

Numerik von Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

mit

$$f(t, y) = \begin{cases} 2t & y \leq 0, \\ 2t - 4y/t & 0 < y < t^2, \\ -2t & y \geq t^2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(0, 0)$ nicht die Lipschitz-Bedingung

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$$

erfüllt. (5 P)

Aufgabe 2
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1001 & 999 \\ 999 & -1001 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

i) Berechnen Sie die exakte Lösung der Anfangswertaufgabe. (Matrix diagonalisieren!) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

ii) Betrachten Sie die Näherungswerte $\mathbf{y}_i$ des expliziten Euler-Verfahrens mit konstanter Schrittweite $\Delta t > 0$. Unter welchen Voraussetzungen an Δt verhält sich die Näherung für $t \to \infty$ wie die exakte Lösung?

iii) Wie verhält sich die mit dem implitziten Euler-Verfahren

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta t \cdot \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$$

berechnete Näherung für $t \to \infty$?

(5 P)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktregel

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta t\,,\ \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})\right)$$

konsistent von zweiter Ordnung ist. (5 P)

Aufgabe 4

Zur Lösung eines Anfangswertproblems $y' = f(t,y),\ y(a) = y_0$ sei für jedes $p > 0$ ein Einschrittverfahren p-ter Ordnung gegeben. Es wird angenommen, dass es von p unabhängige Konstanten $T_0, K > 0$ gibt, so dass das Einschrittverfahren p-ter Ordnung für jeden Schritt die Rechenzeit pT_0 benötigt und in $t = b$ den Wert der gesuchten Funktion mit einem Fehler $K \cdot \Delta t^p$ approximiert.

Bestimmen Sie für p und einen vorgeschriebenen Fehler $\epsilon \leq K$ in $t = b$ die größtmögliche Schrittweite $\Delta t = \Delta t(p, \epsilon)$ und die zugehörige Gesamtrechenzeit $T = T(p, \epsilon)$. Wie verhält sich T in Abhängigkeit von p und welches ist die optimale Konsistenzordnung $p_{opt} = p_{opt}(\epsilon)$? Wie verhält sich p_{opt} in Abhängigkeit von ϵ? Der Einfachheit halber sei angenommen, dass die Ordnung p sowie die Anzahl N der benötigten Schritte des Verfahrens reell gewählt werden dürfen. (5 P)

Abgabe: Donnerstag, 29.10. in der Übung oder bis 17 Uhr in das Postfach "Ortleb/Messerschmidt/Kopecz"