Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb
Dipl.-Math. Thomas Hennecke

WiSe 2009/2010

Numerik von Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

a) Geben Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = 2$ der Form

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & c_3 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

an. Warum besitzen derartige Runge-Kutta-Verfahren die Eigenschaft, dass sie nur relativ wenig Speicherplatz erfordern?

b) Wie sind in dem Einschrittverfahren

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t\{\alpha f(t_i, y_i) + \beta f(t_i + \gamma\Delta t, y_i + \gamma\Delta t f(t_i, y_i))\}$$

die Parameter α, β und γ zu wählen, um eine maximale Konsistenzordnung zu erhalten?

(5 P)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p. Zeigen Sie, dass die zugehörige Quadraturformel mindestens Ordnung p besitzt, d. h., dass

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t)\, dt = \Delta t \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_0 + c_j\Delta t)$$

für alle Polynome f mit $\operatorname{grad} f \leq p - 1$ gilt. (5 P)

Aufgabe 3

Gegeben sei das sogenannte Lotka-Volterra-System

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

a) Zeigen Sie, dass man dieses System mittels einer Transformation der Form

$$u(\tau) = \mu x(\lambda\tau), \quad v(\tau) = \nu y(\lambda\tau)$$

mit $\lambda, \mu, \nu > 0$ auf die Form

$$\dot{u} = u(1-v), \quad \dot{v} = -cv(1-u)$$

mit $c > 0$ bringen kann.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $H\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} = \{(u,v) \mid u, v > 0\}$ gegeben durch

$$H(u,v) = c(u - \ln u) + (v - \ln v)$$

entlang jeder Lösung des transformierten Systems konstant ist.

c) Zeigen Sie, dass H auf der Kurve $u = 1$ sowie auf jeder Kurve der Form $v = u^d$, $d \in \mathbb{R}$ in $(u,v) = (1,1)$ ein Minimum z_{min} besitzt und zudem auf einer solchen Kurve jeden Wert $z > z_{\text{min}}$ genau zweimal annimmt. Begründen Sie damit, dass alle Lösungen der transformierten Differentialgleichung mit $u(t_0), v(t_0) > 0$ in $\mathbb{D}$ bleiben und periodisch sind.

d) Sei u_i, v_i die zum transformierten Problem mit dem expliziten Euler-Verfahren berechnete numerische Lösung. Zeigen Sie, dass für hinreichend kleines $\Delta t > 0$ und $(u_i, v_i) \neq (1,1)$

$$H(u_{i+1}, v_{i+1}) > H(u_i, v_i)$$

gilt. Was bedeutet das für die numerische Lösung?

e) **Programmieranteil:** Führen Sie entsprechende numerische Experimente durch, indem Sie das explizite Euler-Verfahren für dieses System in Matlab programmieren. Arbeiten Sie dabei strukturiert: Erstellen Sie zunächst eine Routine, die einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens für ein beliebiges Anfangswertproblem $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ löst (die sich also als Baustein wiederverwenden lässt) und implementieren Sie nun das Verfahren für das Lotka-Volterra-System für $c = 1$.

Führen Sie Rechnungen aus für die Startwerte $(u_0, v_0) \in \{(0.5, 1), (0.1, 2), (1.1, 0.8)\}$ und verschiedene Schrittweiten und plotten sie die Lösungskurven im $\mathbb{R}^2$.

Geben Sie einen Ausdruck ihrer gut kommentierten Programmdatei(en) sowie ihre Beobachtungen ab. Das zusätzliche elektronische Verschicken der Programmdateien fällt dieses Mal ausnahmsweise weg.

(10 P)

Abgabe: Donnerstag, 5.11. in der Übung oder bis 17 Uhr in das Postfach "Ortleb/Messerschmidt/Kopecz"