

Numerik I

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

- a) Weisen Sie die Normeigenschaften (N1) - (N4) für die Betragssummennorm $\|\cdot\|_1$ und die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ nach.
- b) Skizzieren Sie die Einheitskugeln $K_1^p := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.
- c) Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \|\mathbf{y}\|_1,$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn für jedes $i \in 1, \dots, n$ entweder $y_i = 0$ oder $x_i = \|x\|_\infty \cdot \text{sign}(y_i)$ gilt. Hierbei ist die Signumfunktion definiert als

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}.$$

(5 P)

Aufgabe 2

Gegeben seien die Matrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

- a) Für welche reellen Werte α und β besitzt das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
 - i) eine eindeutige Lösung (man berechne diese),
 - ii) mehrere Lösungen (man gebe die allgemeine Lösung an),
 - iii) keine Lösung?
- b) Zeigen Sie (ohne Benutzung der Matrixnormen in Kapitel 1.2 des Vorlesungsskripts): Für die gegebene Matrix \mathbf{A} und beliebige Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|\mathbf{Ax}\|_\infty \leq (3 + |\alpha|) \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{und} \quad \|\mathbf{Ax}\|_1 \leq \max\{4, 3 + |\alpha|\} \cdot \|\mathbf{x}\|_1.$$

(5 P)

Abgabe: Bis Freitag, 24.10.2008, 9:30 Uhr
(Einwurf in das Numerik I – Abgabefach vor dem Raum 2404)