Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb

WiSe 2008/2009

Numerik I

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

Zeigen Sie: Ein linearer Operator $A : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.

(3 P)

Aufgabe 2

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gegeben durch $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Skizzieren Sie die Menge $M := \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\|_\infty = 1\}$ und lesen Sie an dieser Skizze den Wert von $\|\mathbf{A}\|_\infty := \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|\mathbf{Ax}\|_\infty$ ab.

(2 P)

Aufgabe 3

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sei der lineare Raum der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $C[a, b]$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Die durch

$$\|\cdot\|_\infty : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$$

und

$$\|\cdot\|_1 : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

gegeben Normen auf $C[0,1]$ sind nicht äquivalent. (Die Normeigenschaften selbst müssen nicht nachgewiesen werden.)

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.

b) Untersuchen Sie, ob der lineare Operator

$$\delta : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \delta(f) = f(0)$$

beschränkt ist, wenn $C[0,1]$ ausgestattet ist mit:

i) der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ii) der Norm $\|\cdot\|_1$.

Berechnen Sie gegebenenfalls die Operatornorm von δ.

(Hierbei ist $\mathbb{R}$ natürlich mit der Betragsnorm $|\cdot|$ versehen.)

(5 P)

Abgabe: Bis Freitag, 31.10.2008, 9:30 Uhr
(Einwurf in das Numerik I – Abgabefach vor dem Raum 2404)