Fachbereich Mathematik **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb

Numerik I

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Zeilensummennorm, die Spaltensummennorm und die Frobenius-Norm der komplexen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4-3i & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathbf{Bx}\|_1 = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ik}|,$$

d.h. die Spaltensummennorm ist tatsächlich die durch die Betragssummennorm induzierte Matrixnorm.

c) Sei $|||\cdot|||$ eine Matrixnorm, die durch die Vektornorm $\|\cdot\|$ induziert wird. Zeigen sie, dass dann für Einheitsmatrizen $\mathbf{I}$ beliebiger Größe $|||\,\mathbf{I}\,||| = 1$ gilt.
Folgern Sie daraus, dass die Frobeniusnorm keine induzierte Matrixnorm ist.

(5 P)

Aufgabe 2

Gesucht ist das Produkt zweier reeller 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist der folgende Algorithmus:

$$\begin{aligned}
p_1 &= (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\
p_2 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\
p_3 &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) & c_{11} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
p_4 &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} & c_{12} &= p_4 + p_5 \\
p_5 &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) & c_{21} &= p_6 + p_7 \\
p_6 &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) & c_{22} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7 \\
p_7 &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11}
\end{aligned}$$

i) Rechnen Sie nach, dass der gegebene Algorithmus tatsächlich das Produkt obiger Matrizen liefert.

ii) *Schnelle Matrixmultiplikation nach Strassen:*

Für die Berechnung des Produktes zweier $(2^{k+1} \times 2^{k+1})$-Matrizen, mit $k \in \mathbb{N}_0$, kann der gegebene Algorithmus verallgemeinert werden. Dabei werden die Ausgangsmatrizen jeweils in vier Blöcke von $(2^k \times 2^k)$-Matrizen zerlegt und die in der gegebenen Rechenvorschrift auftretenden Operationen als Operationen zwischen Matrizen niedrigerer Dimension aufgefasst. Dies lässt sich rekursiv fortsetzen bis nur noch elementare arithmetische Operationen (das sind Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen) zwischen reellen Zahlen ausgeführt werden müssen.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass bei diesem Vorgehen für die Multiplikation zweier $(2^k \times 2^k)$-Matrizen $7^{k+1} - 6 \cdot 4^k$ elementare arithmetische Operationen benötigt werden.

iii) Wieviele elementare arithmetische Operationen benötigt die naive Matrixmultiplikation ("Zeile mal Spalte") für die Multiplikation zweier $(2^k \times 2^k)$-Matrizen?

Finden Sie – z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners – heraus welche Größenordnung die Matrizen haben müssen, damit der Strassen-Algorithmus tatsächlich weniger elementare arithmetische Operationen benötigt.

(5 P)

Abgabe: Bis Freitag, 7.11.2008, 9:30 Uhr
(Einwurf in das Numerik I – Abgabefach vor dem Raum 2404)