Fachbereich Mathematik **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb

Numerik I

Aufgabenblatt 6

Für ein beliebiges aber festes $c \in \mathbb{C}$ betrachte man die Funktion

$$f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_c(x) = x^2 + c\,.$$

Die Mandelbrotmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist definiert als die Menge der $c \in \mathbb{C}$, für die die Folge der Iterierten $(f_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. (Notation: $f_c^n(0) = \underbrace{f_c \circ \cdots \circ f_c}_{\text{n-mal}}(0)$)

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass alle $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq \frac{3}{16}$ in der Mandelbrotmenge enthalten sind.

Hinweis: Schränken Sie f_c auf eine Menge der Form $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ mit $r \in \mathbb{R}$ ein.

(5 P)

Aufgabe 2

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe haben Sie Zeit **bis zum 5.12.2008, 9:30 Uhr**.
Die 30%-Regelung betrifft die Gesamtpunktzahl der Übungsblätter 6 und 7.

Im Folgenden soll die Mandelbrotmenge visualisiert werden. Das entstehende Bild wird auch als Apfelmännchen bezeichnet. Dazu soll eine Matrix $\mathbf{A}$ konstruiert werden, deren Einträge die Farbwerte an bestimmten Gitterpunkten im Rechteck

$$[-2.5, 1.5] + i[-1.5, 1.5] \subset \mathbb{C}$$

darstellen.

Es kann gezeigt werden, dass die Folge $(f_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, falls es eine Iterierte $f_c^m(0)$ gibt mit $|f_c^m(0)| > 2$, dies nutzen wir für unser Verfahren aus.

Abhängig von der Anzahl der Gitterpunkte `NX`, `NY` in Richtung der reellen bzw. der imaginären Achse soll das Verhalten der Iterierten für die komplexen Zahlen der Form

$$c = -2.5 + \frac{4 \cdot k}{\mathtt{NX} - 1} + i\left(-1.5 + \frac{3 \cdot j}{\mathtt{NY} - 1}\right), \quad k \in \{0, \ldots, \mathtt{NX} - 1\},\ j \in \{0, \ldots, \mathtt{NY} - 1\}$$

untersucht werden. Die Matrix $\mathbf{A}$ wird zunächst initialisiert als `A = zeros(NY,NX);` Für jeden Gitterpunkt c wird dann wiederholt die Iterationsvorschrift

$$x_{m+1} = f_c(x_m)$$

mit Startwert $x_1 = c$ durchgeführt, bis entweder $|x_m| > 2$ gilt, oder die vorher festgelegte maximale Iterationszahl `maxit` erreicht ist. (Im letzteren Fall nehmen wir an, dass der Punkt in der Mandelbrotmenge liegt.)

Falls eine Iterierte den Kreis mit Radius 2 verlässt, wird in der Matrix $\mathbf{A}$ an der Stelle a_{jk} der Index m abgespeichert, bei der die Iteration abgebrochen wurde – andernfalls wird der Eintrag bei 0 belassen.

i) Schreiben Sie eine Funktion

$$\texttt{function A} = \texttt{NAME\_apfel}(\texttt{NX}, \texttt{NY}, \texttt{maxit})$$

mit Eingabeparametern `NX, NY` und `maxit`, die die Matrix $\mathbf{A}$ mit dem kodierten Bild des Apfelmännchens wie beschrieben erzeugt.

Informationen zum Schreiben und Aufrufen von Function-Files finden Sie auf den Seiten 13 und 14 des deutschen Matlab-Tutoriums. Vergleichsoperatoren, logische Operatoren sowie Steuerstrukturen finden Sie auf den Seiten 15-18.

Speichern Sie das Function-File als `NAME_apfel.m` .

ii) Ist die Schreibroutine beendet, kann die Matrix mittels `image(A)` visualisiert werden. Sollte dies bei Ihnen nicht funktionieren, versuchen Sie es bitte mit einer der Funktionen auf der Übungshomepage, die das Bild als PPM-Dateien schreiben.

Testen Sie ihre Funktion mit den folgenden Werten und vergleichen Sie die Bilder.

NX	NY	maxit
500	500	20
500	500	100
800	800	100
800	500	100

Schreiben Sie dazu eine Script-Datei `NAME_blatt6.m`, die für jeden Testfall Ihre Funktion aufruft und das entsprechende Bild erzeugt. Für $n = 1, \ldots, 4$ sorgt der Befehl `figure(n)` vor der Ausführung des Plot-Befehls dafür, dass nicht nur das letzte Bild sichtbar ist.

Schicken Sie die beiden *gut kommentierten* Dateien an

`numerikabgabe@mathematik.uni-kassel.de`.

Geben Sie auch einen Ausdruck der Dateien mit ab.

(10 P)

Abgabe: Bis Freitag, 28.11.2008, 9:30 Uhr
Matlab-Aufgabe bis Freitag, 5.12.2008, 9:30 Uhr