Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften **SoSe 2013**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Sigrun Ortleb

Numerik partieller Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Bestimmen Sie den Typ des Systems

$$\begin{aligned} u_t + au_x + bv_x &= 0, \\ v_t + bu_x + av_x &= 0, \end{aligned}$$

und des Systems

$$\begin{aligned} u_t + au_x + bv_x + au_y + av_y &= 0, \\ v_t + bu_x + av_x + bu_y + bv_y &= 0, \end{aligned}$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. (4 P)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken die Lösung der quasilinearen partiellen Differentialgleichung

$$(1 + x)u_x - (1 + y)u_y = y - x$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 1 - x.$$

(4 P)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass sich die eindimensionalen Euler-Gleichungen auch in der Form

$$\begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \frac{1}{\rho}p_x &= 0, \\ p_t + vp_x + \gamma p v_x &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

schreiben lassen. (4 P)

Aufgabe 4
Eine wichtige thermodynamische Größe bei Gasen ist die Entropie S, die bis auf eine additive Konstante definiert ist durch

$$S = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + const.$$

Hierbei ist c_v die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen und γ der Isentropenexponent.

Leiten Sie aus den eindimensionalen Euler-Gleichungen die Beziehung

$$S_t + vS_x = 0 \tag{2}$$

her. [*Tipp:* Verwenden Sie die Euler-Gleichungen in der Form (1) aus Aufgabe 3.]

Die Gleichung (2) besagt, dass in den Bereichen, in denen eine glatte Lösung der Euler-Gleichungen existiert, die Entropie entlang Teilchenbahnen konstant ist. (4 P)

Abgabe: **Dienstag, 7. Mai 2013**