

Aufgabe 2

Seien zwei verschiedene Geraden $g, h \subset \Gamma$ mit $g \parallel h$ gegeben. Ferner sei $b \in \mathbb{R}^+$ der Abstand der beiden Parallelen g und h .

Zu zeigen: Die Komposition von S_g und S_h ist eine Verschiebung um $2b$.

(siehe auch <http://www.mathematik.uni-kassel.de/~rascha/Elementargeometrie2009/Ueb4Loe2.html>)

Seien $P' = S_h(P)$ und $P'' = S_g(P')$. A und B seien die entsprechenden Schnittpunkte der Geraden $\overline{PP''}$ mit h und g .

Fallunterscheidung bzgl. der Lage des Punktes P

1. P liegt links von h und P' rechts von g . Fallunterscheidung nach der Lage des Punktes P'' ...

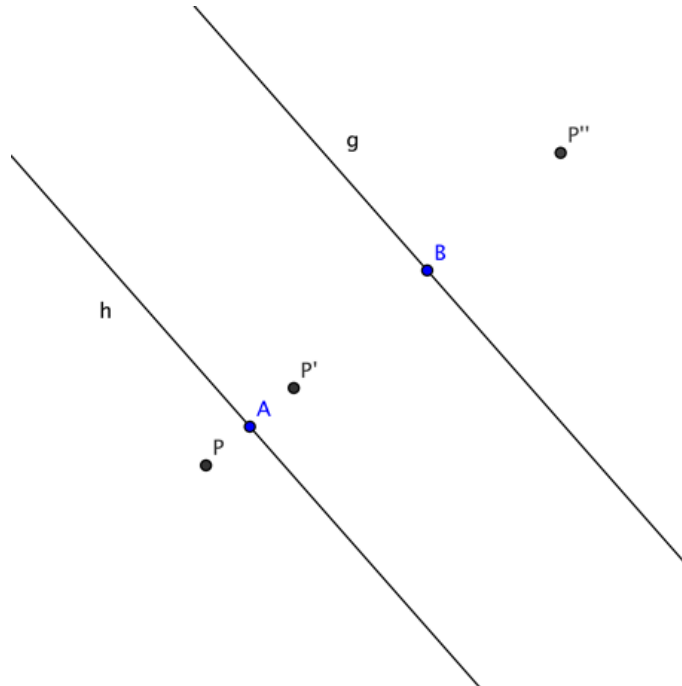
1.1 P liegt links von h und P' auf g , also $P'' = P'$.

Dann gilt mit Axiom 7c $|PP''| = |PA| + |AP''|$ mit A Schnittpunkt von $\overline{PP''}$. Mit $B = P''$ folgt wegen $|PA| = |AP''|$ also $|PP''| = 2|AB| = 2b$.

1.2 P liegt links von h und P' zwischen h und g .

Dann gilt

$$|PA| = |AP'| \quad \text{und} \quad |P'B| = |BP''|.$$



Es folgt also wieder mit Axiom 7c

$$|PP''| = |PA| + |AP'| + |P'B| + |BP''| = 2|AP'| + 2|P'B| = 2(|AP'| + |P'B|) = 2|AB|.$$

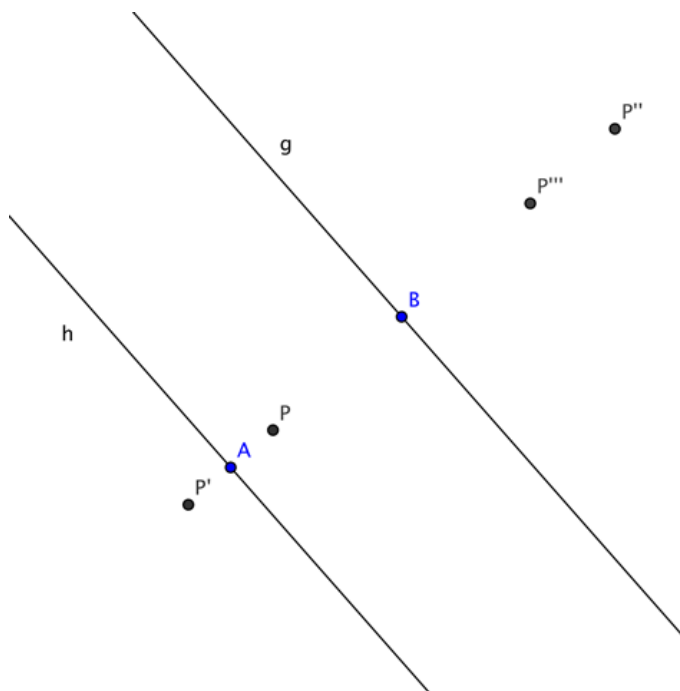
Die letzte Gleichheit folgt wegen $P' \in \overline{AB}$. Somit gilt schließlich $|PP''| = 2b$.

2. P liegt auf h .

$$|PP''| = 2|AB| = 2b.$$

3. P liegt zwischen h und g .
Es gilt

$$|PA| = |AP'| \quad \text{und} \quad |P'B| = |BP''|.$$



Ferner sei $S_g(P) = P'''$ und somit $|PB| = |BP'''|$.

Es folgt also

$$|PP''| = |PB| + |BP'''| + |P'''P''| = 2|PB| + |P'P|.$$

Die letzte Gleichheit folgt wegen der Längentreue der Geradenspiegelung an g ($|P'P| = |S_g(P')S_g(P)| = |P''P'''|$).

Schließlich gilt wegen $P \in \overline{AB}$:

$$|PP''| = 2|PB| + |P'P| = 2|PB| + 2|AP| = 2(|AP| + |PB|) = 2|AB| = 2b.$$

4. P liegt auf g : Analog zu Fall 2 durch Vertauschung von g und h .

$$|PP''| = |P'P''| - |PP'| = 2|PP'| - |PP'| = |PP'| = 2|AB| = 2b.$$

5. P liegt rechts von g : Analog zu Fall 1 durch Vertauschung von g und h .

$$|PP''| = |P'P''| - |PP'| = 2|P'B| - 2|P'A| = 2(|P'B| - |P'A|) = 2|AB| = 2b.$$

(10 Punkte)