Universität Kassel
Dipl. Math. S. Schreiber

6. Übungsblatt - Komplexe Zahlen

Aufgabe 1 Berechnen Sie:

$a)$ $i + i + i$	$b)$ $(1 + 5i) - (3 - 2i)$	$c)$ $4 + \sqrt{3}i + \sqrt{5}i$
$d)$ $(2 + 4i) \cdot (5 - 3i)$	$e)$ $3i \cdot 4i$	$f)$ $\frac{1}{i}$
$g)$ i^2, i^3, i^4	$h)$ $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{20}$	$j)$ i^{13}
$k)$ $\left(\frac{2+3i}{1-2i} + \frac{i}{3+i}\right)^{-1}$	$l)$ $\frac{4+i\sqrt{5}}{\sqrt{5}-4i}$	$m)$ $\frac{1}{2-i\sqrt{5}}$

Aufgabe 2 Überführen Sie folgende komplexe Zahlen in die Polarkoordinatendarstellung:

$a)$ -1 $\quad b)$ $2i$ $\quad c)$ $1 - i\sqrt{3}$ $\quad d)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die komplexen Zahlen zu den angegebenen Polarkoordinaten in die Form $a + bi$:

$a)$ $r = 10, \phi = 210°$ $\quad b)$ $r = 8, \phi = 135°$ $\quad c)$ $r = 6, \phi = \frac{4}{3}\pi$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen

$a)$ $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(\sqrt{8} + \frac{1}{4}i\right)$ $\quad b)$ $i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right)$ $\quad c)$ $e^{\pi i}$

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der folgenden Definition von Addition und Multiplikation ein Körper ist.

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v),$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Aufgabe 6 Überprüfen Sie die nachfolgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinatendarstellung:

a) Für $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i \cdot \sin\phi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i \cdot \sin\phi_2)$ gilt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2)\right).$$

b) Für $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i \cdot \sin\phi_1) \neq 0$ und $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i \cdot \sin\phi_2)$ gilt

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \left(\cos(\phi_2 - \phi_1) + i \cdot \sin(\phi_2 - \phi_1)\right).$$

c) Deuten Sie (mit Hilfe von a) und b)) das Produkt $z_1 z_2$ und den Quotienten $\frac{z_2}{z_1}$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 geometrisch.

d) Zeigen Sie die obere und untere Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen z_1 und z_2, d.h.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{und} \quad |z_1 + z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|.$$

Aufgabe 7 Begründen Sie: Die n Wurzeln von

$$z^n = \zeta \quad , \quad \mathbb{C} \ni z, \zeta = \rho(\cos\psi + i \cdot \sin\psi) \neq 0\ ,\ n \in \mathbb{N},$$

bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis $|z| = \sqrt[n]{\rho}$.

Aufgabe 8 Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche gilt:

a) $|z| = r > 0$,

b) $|z| + \Re(z) \leq 1$,

c) $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = 1$,

d) $\left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2 \cdot \left|z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

a) $z^4 = 1 + i$,

b) $z^3 = -i$.