Übungen zur Algebra I — Blatt 1, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Dientstags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Das neutrale Element ist eindeutig.

(b) Jedes linksneutrale Element e (d.h., für alle $g \in G$ gilt $eg = g$) ist ein rechtsneutrales Element (d.h., für alle $g \in G$ gilt $ge = g$) und damit das neutrale Element.

(c) Das inverse Element von $g \in G$ ist eindeutig.

(d) Jedes linksinverses Element von $g \in G$ (d.h., $g^{-1}g = 1$) ist auch ein rechtsinverses Element von g (d.h., $gg^{-1} = 1$).

2. Aufgabe: (4 Punkte) Eine assoziative Verknüpfung $'' \cdot ''$ auf einer Menge M definiert genau dann eine Gruppe, wenn gilt:

$$\forall a, b \in M \quad \exists x, y \in M : \quad x \cdot a = b,\ a \cdot y = b.$$

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei H eine Halbgruppe. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt von n Elementen $h_1, \ldots, h_n \in H$ ist unabhängig von der Klammerung.

(b) H besitze ein neutrales Element 1. Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $h \in H$ sei $h^n := hh^{n-1}$ (wobei $h^0 := 1$). Zeigen Sie, daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$h^m \cdot h^n = h^{m+n}. \tag{1}$$

(c) Falls H eine Gruppe ist, dann gilt Gleichung (1) für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $G = \{g_1 = 1, \ldots, g_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine endliche Gruppe und $A := (g_{i,j}) \in G^{n \times n}$ die Gruppentafel von G, d.h., die Matrix mit Einträgen $g_{i,j} := g_i g_j$. Zeigen Sie, daß in jeder Zeile (bzw. in jeder Spalte) von A jedes Element von G genau einmal vorkommt.