Übungen zur Algebra I — Blatt 2, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

Es sei G im folgenden eine Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

5. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen von G ist eine Untergruppe von G.

(b) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist ein abelscher Normalteiler von G. (Hierbei sei

$$Z(G) := \{z \in G \mid gz = zg \, \forall g \in G\}$$

das *Zentrum von G*.)

(c) Die Abbildung

$$G \to \mathrm{Aut}(G), \; g \mapsto \varphi_g$$

(wobei φ_g der Automorphismus von G ist, welcher durch die Konjugation mit g gegeben ist) ist ein Homomorphismus, dessen Kern mit dem Zentrum von G übereinstimmt.

6. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) $N_1 \trianglelefteq G$, $N_2 \trianglelefteq G \Rightarrow N_1N_2 \trianglelefteq G$ und $N_1 \cap N_2 \trianglelefteq G$.

(b) $H \leq G$ und $(G : H) \leq 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

7. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $\phi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Ist $U \leq G$ eine Untergruppe von G, dann ist $\phi(U)$ eine Untergruppe von G'. Zeigen Sie auch, daß die entsprechende Aussage für Normalteiler i.A. falsch ist.

(b) Ist $U' \subseteq G'$ eine Untergruppe (bzw. ein Normalteiler) von G', dann ist die Menge $\phi^{-1}(U')$ ebenfalls eine Untergruppe (bzw. ein Normalteiler) von G.

8. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei X eine Untergruppe von G, Y ein maximaler Normalteiler von X und N ein Normalteiler von G. Dann gilt $XN = YN$ genau dann, wenn $X \cap N \neq Y \cap N$ ist. Im Falle $X \cap N \neq Y \cap N$ ist X/Y isomorph zu $(X \cap N)/(Y \cap N)$ und im Falle $X \cap N = Y \cap N$ zu XN/YN.