Übungen zur Algebra I — Blatt 3, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

---

9. Aufgabe: (4 Punkte) Direkte Produkte auflösbarer Gruppen sind auflösbar.

10. Aufgabe: (4 Punkte) Eine Gruppe G operiere auf zwei Mengen M_1, M_2. Diese Operationen heissen *äquivalent*, falls es eine Bijektion $\varphi : M_1 \to M_2$ gibt, so daß $\varphi(gm) = g\varphi(m)$. Es sei

$$ {}^G h := \{ {}^g h = ghg^{-1} \mid g \in G \} $$

die *Konjugiertenklasse von* $h \in G$ und

$$ G_h := \{ g \in G \mid {}^g h = h \}. $$

Zeigen Sie, daß die Operationen von G auf ${}^G h$ (Konjugation) und auf den Linksnebenklassen von G_h (Linkstranslation) äquivalent sind.

11. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei G eine Gruppe, $X, Y, Z \leq G$ und

$$ [X, Y] := \langle [x, y] \mid x \in X,\ y \in Y \rangle. $$

Man setze $[X, Y, Z] := [[X, Y], Z]$ und $[x, y, z] := [[x, y], z]$. Man beweise die folgende Aussage:

$$ [X, Y, Z] = 1 = [Y, Z, X] \quad \Rightarrow \quad [Z, X, Y] = 1. $$

Hinweis: Beweisen Sie die folgende Formel:

$$ {}^{y^{-1}}[x, y^{-1}, z] \cdot {}^{z^{-1}}[y, z^{-1}, x] \cdot {}^{x^{-1}}[z, x^{-1}, y] = 1. $$

12. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Es seien X, Y Gruppen und φ ein Homomorphismus von Y nach $Aut(X)$. Man bezeichne den Automorphismus $\varphi(y)$, $y \in Y$ von X mit

$$ x \mapsto {}^y x \, (= {}^{\varphi(y)}(x)\,). $$

Zeigen Sie, daß die Menge

$$ G := \{ (x, y) \mid x \in X,\ y \in Y \} $$

durch die Multiplikation

$$ (x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 \cdot {}^{y_1} x_2, y_1 y_2) $$

zu einer Gruppe wird. Die so erhaltene Gruppe wird als das *semidirekte Produkt von* X *mit* Y *bzgl.* φ bezeichnet.

(b) Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Geben Sie die Kommutatorreihe des semidirekten Produktes des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^2$ mit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an. Hierbei ist der zugehörige Homomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to Aut(\mathbb{F}_2^2)$ gegeben durch die Matrixmultiplikation von Elementen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ mit Elementen aus $\mathbb{F}_2^2$.