Übungen zur Algebra I — Blatt 4, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

---

13. Aufgabe: (4 Punkte) Begründen Sie, wieso für zwei Primzahlen $p < q$ und jede natürliche Zahl $b \geq 1$ eine Gruppe der Ordnung pq^b oder p^2q^b niemals einfach sein kann. (Bem.: Nach dem Satz von Burnside gilt sogar, daß alle Gruppen der Ordnung p^aq^b, $a, b, \in \mathbb{N}$, auflösbar sind.)

14. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie, daß Gruppen der Ordnungen 700 und 992 auflösbar sind.

15. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Ein Element $i \in G$ welches von der Ordnung 2 ist (d.h., $i^2 = 1$ aber $i \neq 1$) wird auch eine *Involution* genannt. Eine endliche Gruppe heißt *Diedergruppe*, falls sie von zwei Involutionen erzeugt wird.

Zeigen Sie, daß eine endliche Gruppe G genau dann eine Diedergruppe ist, falls G einen zyklischen Normalteiler $\langle d \rangle$ vom Index 2 besitzt sowie eine Involution i mit $idi = d^{-1}$.

16. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$. Zeigen Sie, daß man D_n in die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{tr}} = A^{-1}\}$$

einbetten kann. Geben Sie ein regelmässiges n-Eck $P \subseteq \mathbb{R}^2$ an, welches von D_n (aufgefaßt als Untergruppe der $O(2, \mathbb{R})$) als Punktmenge invariant gelassen wird.