Übungen zur Algebra I — Blatt 5, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

---

17. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Es sei G eine endliche Gruppe. Man definiere induktiv eine Reihe von Untergruppen $L_i(G) \leq G$ durch $L_0(G) := G$ und $L_i(G) := [L_{i-1}, G]$, $i = 1, 2, \ldots$. Eine Gruppe heißt *nilpotent*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit $L_n(G) = \{1\}$. Zeigen Sie, daß nilpotente Gruppen auflösbar sind.

(b) Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß Gruppen der Ordnung p^2 isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sind.

18. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei G die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, welche von den Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Zeigen Sie, daß G isomorph zu der freien Gruppe vom Rang zwei ist.

Hinweis: Man fasse G als Untergruppe derjenigen Gruppe auf, welche von A und der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Diese Gruppe operiert auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \infty$ wobei J ein Element z auf $1/z$ abbildet ($1/\infty := 0, \quad 1/0 := \infty$) und A ein Element z auf $2 + z$ abbildet ($1 + \infty := \infty$). Es seien $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |z| \leq 1\}$ und $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |z| \geq 1\}$, wobei $|z|$, $z \in \mathbb{C}$, der gewöhnliche Absolutbetrag ist und $|\infty| = \infty$. Jetzt benutze man daß Ω_1 von A in eine echte Untermenge von Ω_2 abgebildet wird und daß Ω_1 und Ω_2 von J vertauscht werden.

19. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Es sei D_4 die Diedergruppe der Ordnung 8 und S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen. Geben Sie zwei treue Permutationsdarstellungen

$$\pi_i : D_4 \to S_{n_i},\ i = 1, 2,$$

an, wobei $n_1 = 8$ und $n_2 = 4$. (*Treu* heißt hierbei, daß der Kern von π_i nur aus der 1 besteht.)

(b) Es seien $\sigma, \tau \in S_n$ zwei Permutationen welche in der disjunkten Zykelschreibweise vorliegen. Zeigen Sie, daß man die Permutation $\sigma\tau\sigma^{-1}$ erhält, indem man in der Zykeldarstellung von τ jeden Eintrag $i \in \{1, \ldots, n\}$ durch $\sigma(i)$ ersetzt.

20. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei G eine endliche Gruppe und $\{G_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ eine Familie von Untergruppen von G. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $G = \langle G_i \mid i = 1, \ldots, n \rangle$ und für $i \neq j$ gilt $[G_i, G_j] = 1$.

(b) Es sei $D := G_1 \times \cdots \times G_n$ und $D_i \leq D$ die Untergruppe, deren Elemente folgendermaßen aussehen: Alle Komponenten sind 1 mit Ausnahme der i-ten Komponente. Dann ist die Abbildung

$$\pi : D \to G, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$$

eine surjektiver Homomorphismus mit $\pi(D_i) = G_i$ und $D_i \cap \mathrm{Ker}(\pi) = 1$.

Bem.: G wird manchmal auch als *zentrales Produkt* von $G_1, \ldots, G_n$ bezeichnet.