Übungen zur Algebra I — Blatt 6, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

---

21. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik p. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn R endlich ist, dann ist die Ordnung von R ist eine Potenz von p.

(b) Die *Frobeniusabbildung*

$$F : R \to R,\ x \mapsto x^p$$

ist ein Ringhomomorphismus von R.

(c) Wenn $U \subseteq R$ ein Unterring von R ist, dann ist die Charakteristik von U gleich p.

22. Aufgabe: (6 Punkte) Es seien R_1, R_2 Ringe, und es sei

$$R_1 \times R_2 := \{(r_1, r_2) \mid r_i \in R_i,\ i = 1, 2\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $R_1 \times R_2$ bzgl. komponentenweiser Multiplikation und Addition zu einem Ring wird (*das direkte Produkt von R_1 und R_2*).

(b) Es sei $p_i : R_1 \times R_2 \to R_i$, $i = 1, 2$, die Projektion auf die i-te Komponente. Zeigen Sie, daß $R_1 \times R_2$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Wenn man einen Ring R und zwei Homomorphismen $f_i : R \to R_i$, $i = 1, 2$, gegeben hat, dann existiert genau ein Homomorphismus $g : R \to R_1 \times R_2$, mit der Eigenschaft, daß $f_i = p_i \circ g$.

(c) Es sei K ein Körper. Geben Sie alle Ideale und alle Nullteiler von $K \times K$ an.

23. Aufgabe: (6 Punkte) Es sei R ein Ring, $\mathfrak{b}$ ein Ideal und $\pi : R \to \bar{R} := R/\mathfrak{b}$ die Restklassenabbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\pi' : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{b}$ ist, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : R' \to \bar{R}$ mit $\pi = f \circ \pi'$.

(b) Die Abbildung π induziert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Ideale von R, welche $\mathfrak{b}$ enthalten, und der Menge aller Ideale von $\bar{R}$.

(c) Entspricht unter der obigen Bijektion das Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ dem Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ (d.h., wenn $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{b}$ enthält und $\pi(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}}$), so sind die Ringe $R/\mathfrak{a}$ und $\bar{R}/\bar{a}$ isomorph.