Übungen zur Algebra I — Blatt 14, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Dienstags

---

50. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und φ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie, daß es in der zyklischen Gruppe Z_n genau $\varphi(n)$ Elemente der Ordnung n gibt und daß Z_n genau $\varphi(n)$ Automorphismen hat.

51. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $q = l^k$ $(k \in \mathbb{N})$ eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Es sei ferner $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, q) = 1$ und ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel in einem algebraischen Abschluss $\bar{\mathbb{F}}_q$. Man zeige:

(a) Es gibt eine Injektion

$$\psi : \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q) \to (Z_n)^\times ,$$

welche den relativen Frobenius-Homomorphismus von $\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q$ auf die zu q gehörige Restklasse $\bar{q} \in (Z_n)^\times$ abbildet.

(b) Der Grad $[\mathbb{F}_q(\zeta_n) : \mathbb{F}_q]$ stimmt mit der Ordnung von $\bar{q}$ überein.

(c) Das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{F}_q[x]$, wenn $\bar{q}$ die Gruppe (Z_n) erzeugt.

52. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei ζ eine primitive 12-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Man bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ und alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.

53. Aufgabe: (4 Punkte) Man bestimme sämtliche Einheitswurzeln, die in den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\, i)$ bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\, i)$ enthalten sind.