Übungen zur Algebra I — Blatt 9, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: In der Übung

---

32. Aufgabe: (4 Punkte) In einer Höhle finden 16 Zwerge einen Schatz aus Goldmünzen. Bei dem Versuch, diesen gerecht zu teilen, bleiben 4 Münzen übrig. Bei dem daraufhin entstehenden Gerangel, gerät einer der Zwerge auf eine der Höhle hinausführende Rutsche und entschwindet den Blicken der anderen. Die übrigen 15 versuchen wieder die Teilung des Schatzes, wobei 7 Münzen übrigbleiben. Wieder setzt ein Gerangel ein, und wieder gerät einer der Zwerge "auf die schiefe Bahn". Als die restlichen danach merken, daß die Teilung nicht erfolgreich sein kann, beschließen sie, den beiden verlorenen Zwergen je eine Münze hinterher zu schicken. Dann geht die Teilung auf.

Wie viele Münzen muß der Schatz mindestens enthalten haben?

33. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Für welche Primzahlen $p \leq 10$ ist das Polynom $x^3 + x^2 + x + 2$ über $\mathbb{F}_p$ irreduzibel.

(b) Es sei K ein Körper, über dem $f = x^3+x^2+x+2$ irreduzibel ist, und es sei α eine Nullstelle von f. Berechnen Sie die Elemente $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2+\alpha)$ und $(\alpha-1)^{-1}$ von $K(\alpha)$ als Linearkombinationen von $1, \alpha, \alpha^2$ mit Koeffizienten aus K.

34. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei K eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß es in $K \setminus \mathbb{Q}$ ein Element gibt, dessen Quadrat in $\mathbb{Q}$ liegt. Dank dieser Tatsache läßt sich K schreiben als

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

wobei $d \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{a^2 \mid a \in \mathbb{Q}^\times\}$ und $\sqrt{d} \in K$ ein Element mit $(\sqrt{d})^2 = d$ ist. Dabei ist nicht relevant, welche der beiden Quadratwurzeln man verwendet. Zeigen Sie:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{d_2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{Q}^\times : d_1 = a^2 d_2.$$

35. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ und sei p eine Primzahl, welche jedes a_i außer a_0 teilt, und p^2 teile nicht a_n. Zeigen Sie, daß $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.