Übungen zur Algebra II — Blatt 1, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

Es sei R ein Ring und M, N Links-R-Moduln.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Wenn R kommutativ ist, dann ist M auch ein Rechts-R-Modul.

(b) Man definiere einen Ring R^{op} dessen unterliegende additive Gruppe $(R, +)$ ist und dessen Multiplikation gegeben ist durch

$$s \cdot r := rs\,,$$

wobei die rechte Seite die Multiplikation in R darstellt. Man zeige, daß jeder Links-R-Modul ein Rechts-R^{op}-Modul ist.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Wenn R kommutativ ist, dann ist $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ein R-Modul. Stimmt diese Aussage immer noch, wenn R nicht kommutativ ist?

(c) Man hat eine natürliche Isomorphie abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \simeq M\,.$$

3. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Der R-Modul M werde von einem Element $m \in M$ erzeugt. Zeigen Sie, daß $M \simeq R/\mathrm{Ann}(m)$.

(b) Es sei T der Torsionsuntermodul von M. Zeigen Sie, daß M/T torsionsfrei ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Torsionsfreie Moduln sind freie Moduln.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Faktormoduln von endlich erzeugten R-Moduln sind wieder endlich erzeugt.

(b) Es sei U ein R-Untermodul von M. Wenn U und M/U endlich erzeugt sind, dann ist M endlich erzeugt.