Übungen zur Algebra II — Blatt 10, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie, daß jedes Radikalideal der Schnitt von endlich vielen Primidealen ist.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien K ein Körper, $K(t)$ der rationale Funktionenkörper über K und $p(t) \in K[t]$ ein irreduzibles Polynom. Für $f(t) \in K[t]$ definiere man $\nu_p(f(t))$ als die größte natürliche Zahl m für die $p(t)^m$ das Polynom $f(t)$ teilt und für $g(t) \in K[t] \setminus \{0\}$ setze man

$$\nu_p(\frac{f(t)}{g(t)}) := \nu_p(f(t)) - \nu_p(g(t)).$$

Man zeige, daß die Zuordnung

$$|h(t)|_p := e^{-\nu_p(h)}, \quad h(t) \in K(t)$$

einen nichtarchimedischer Absolutbetrag auf $K(t)$ definiert.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei k ein Körper mit einem nichtarchimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Für $a, b \in k$ setze man $d(x,y) := |y - x|$. Es seien $a, b, c \in k$.

(a) Zeigen Sie, daß k bzgl. des Abstands $d(\cdot,\cdot)$ ein metrischer Raum ist und daß das Dreieck, welches durch a, b, c definiert wird zwei gleiche Seitenlängen besitzt (bzgl. $d(\cdot,\cdot)$). (Hinweis: Zeigen Sie, daß $|x + y| = \max(|x|, |y|)$.)

(b) Es sei $k = \mathbb{Q}$ mit dem 5-adischen Absolutbetrag. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks mit Ecken $a = 2/15, b = 1/5, c = 7/15$.

4. Aufgabe: (5 Punkte) Es sei k ein Körper mit einem Absolutbetrag $|\cdot|$. Es seien $a \in k$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Der *offene Ball vom Radius r und Zentrum a* ist die Menge

$$B(a,r) := \{x \in k \mid |x - a| < r\}.$$

Der *abgeschlossene Ball vom Radius r und Zentrum a* ist die Menge

$$\bar{B}(a,r) := \{x \in k \mid |x - a| \leq r\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ein offener (bzw. abgeschlossener) Ball ist offen (bzw. abgeschlossen).

(b) Wenn der Betrag $|\cdot|$ nichtarchimedisch ist, so sind die Mengen $B(a,r)$ und $\bar{B}(a,r)$ offen und abgeschlossen.

(c) Wenn der Betrag $|\cdot|$ nichtarchimedisch ist, so sind zwei offene (bzw. abgeschlossene) Bälle sind entweder disjunkt oder einer der Bälle ist in dem anderen enthalten.