Übungen zur Algebra II — Blatt 11, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen: Der Bewertungsring R von $\mathbb{Q}$ bzgl. dem p-adischen Betrag $|\cdot|_p$ ist die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach dem Primideal $\langle p\rangle$. Das zugehörige Bewertungsideal ist das Hauptideal pR von R. Der Restklassenkörper von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ ist zu $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorph.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to 0,$$

wobei die Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ durch $x \mapsto p^n x$ gegeben ist. (Insbesondere gilt $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.)

3. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{Z}_p$ ist bzgl. der p-adischen Topologie ein kompakter topologischer Raum.

(b) $\mathbb{Q}_p$ ist bzgl. der p-adischen Topologie ein lokal kompakter topologischer Raum. (Ein topologischer Raum heißt *lokal kompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Hinweis zur Aufgabe: Man überlege sich, daß es reicht, die Aussage für den Nullpunkt zu zeigen.)

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $\phi_n : \mathbb{Z}_p \to A_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Surjektion aus Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß die resultierende Produktabbildung

$$\phi : \mathbb{Z}_p \to \prod_{n\geq 1} A_n$$

injektiv ist und interpretieren Sie $\mathbb{Z}_p$ als Untermenge von $\prod_{n\geq 1} A_n$.

(b) Zeigen Sie, daß sich $\mathbb{Z}_p$ als der projektive Limes der A_n schreiben läßt (siehe Vorlesung Algebra I zu dem Begriff des projektiven Limes).