Übungen zur Algebra II — Blatt 2, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein Ring. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie, daß diese Sequenz zerfällt, wenn M'' frei ist.

(b) Es seien M, N_1, N_2 Moduln über R. Dann gilt:

$$\mathrm{Hom}(M, N_1 \oplus N_2) = \mathrm{Hom}(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}(M, N_2).$$

2. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß der Vektorraum V bzgl. der Multiplikation

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \cdot v := (\sum_{i=0}^{n} a_i \phi^i)(v)$$

ein $K[x]$-Modul ist.

(b) Zeigen Sie, daß der obige $K[x]$-Modul V ein Torsionsmodul über dem Hauptidealring $K[x]$ ist und daß die Untermoduln von V gerade den ϕ-invarianten Teilräumen entsprechen.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien (V, ϕ) wie in Aufgabe 2. Man nehme an, daß V ein zyklischer $K[x]$-Modul ist, dessen Annihilator von $(x - \lambda)^n \in K[x]$ erzeugt werde. Es sei v ein Erzeuger von V als $K[x]$-Modul. Man zeige, daß die Menge

$$\{v_k := (\phi - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V)^{n-k}(v) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

eine Basis von V über K ist und daß die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis ein Jordanblock der Länge n mit Eigenwert λ ist.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei K algebraisch abgeschlossen und (V, ϕ) wie oben. Zeigen Sie, daß V eine Basis B besitzt, so daß die Darstellungsmatrix von ϕ bzgl. B die Form

$$J = \bigoplus_{i=1}^{s} J_i$$

besitzt, wobei jedes der J_i ein Jordanblock ist. Folgern Sie ebenfalls, daß J bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig ist. (Hinweis: Benutzen Sie, daß $K[x]$ ein Hauptidealring ist, Korollar 7 ii) der Vorlesung und die obigen Aufgaben 2 und 3.)