Übungen zur Algebra II — Blatt 3, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein Ring und M ein Links-R-Modul.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge von Links-R-Modulhomomorphismen $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ ein Rechts-R-Modul ist (der *Dualraum von M*).

(b) Das *doppel-Dual* ist die Menge von Rechts-R-Modulhomomorphismen

$$M^{**} = \mathrm{Hom}_R^{re}(M^*, R)\,.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung $\eta : M \to M^{**}$

$$(\eta(\nu))(\omega) = \omega(\nu) \quad \forall \nu \in M, \forall \omega \in M^*$$

ein Homomorphismus ist. (Wenn η ein Isomorphismus ist, dann heißt M *reflexiv.*)

2. Aufgabe: (4 Punkte) In der Situation von Aufgabe 1. Es sei M endlich erzeugt und projektiv. Zeigen Sie, daß M^* als Rechts-R-Modul endlich erzeugt und projektiv ist. Zeigen Sie ebenfalls, daß M reflexiv ist.

3. Aufgabe: (8 Punkte) Es sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper und $K[G]$ die Menge von formalen Linearkombinationen

$$\alpha = \sum_{x \in G} a_x x \quad x \in G,\ a_x \in K.$$

(a) Zeigen Sie, daß $K[G]$ bzgl. der Multiplikation

$$(\sum a_x x)(\sum b_y y) := \sum_{x\in G} \sum_{y \in G} a_x b_y xy$$

zu einem Ring wird (der *Gruppenring von G*).

(b) Es sei $|G| = n$. Geben Sie eine Injektion in den Matrizenring $K[G] \hookrightarrow \mathrm{End}_K(K^n)$ an. (Hinweis: Man benutze, daß G über die Linkstranslation auf sich selbst operiert und somit als Untergruppe der $S_n \leq GL_n(K)$ aufgefaßt werden kann.)

(c) Es sei $|G| = n$. Zeigen Sie mit (b), daß K^n isomorph zu einem freien $K[G]$-Modul ist.

(d) Es sei nun $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Geben Sie anhand des Gruppenringes $\mathbb{Q}[G]$ ein Beispiel eines projektiven Moduls, der nicht frei ist (Hinweis: Man benutze die Einbettung aus (b) und betrachte die $\mathbb{Q}[G]$-Untermoduln).