Übungen zur Algebra II — Blatt 4, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (6 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei M ein R-S-Bimodul, N ein S-T-Bimodul und Q ein T-U-Bimodul. Zeigen Sie

$$(M \otimes_S N) \otimes_T Q \simeq M \otimes_S (N \otimes_T Q).$$

(b) Es sei M ein R-S-Bimodul. Zeigen Sie, daß

$$R \otimes_R M \simeq M \simeq M \otimes_S S.$$

(c) Es sei R ein kommutativer Ring und M, N zwei R-Moduln. Zeigen Sie, daß

$$M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M.$$

2. Aufgabe: (2 Punkte) Es sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, daß M genau dann flach ist, wenn M torsionsfrei ist.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein Ring und S eine multiplikative Menge, d.h., eine Menge, welche die 1 enthält und welche abgeschlossen unter der Multiplikation ist. Es sei ferner M ein R-Modul und R_S die Lokalisierung von R nach S. Die *Lokalisierung M_S von M nach S* ist die Menge aller Brüche $\frac{x}{s}$ (wobei $x \in M$ und $s \in S$) modulo der folgenden Relation: Man identifiziert $\frac{x}{s}$ mit $\frac{x'}{s'}$, falls es ein $s'' \in S$ gibt mit $s''(s'x - sx') = 0$. Zeigen Sie:

(a) R_S ist ein flacher R-Modul.

(b) Die Lokalisierung M_S ist ein flacher Modul über R_S und über R.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Let $M = \oplus_{i \in I} M_i$ eine direkte Summe von R-S-Bimoduln und $N = \oplus_{j \in J} N_j$ eine direkte Summe von S-T-Bimoduln. Zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus von R-T-Bimoduln

$$M \otimes_S N \simeq \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} (M_i \otimes N_j)$$

gibt.