Übungen zur Algebra II — Blatt 5, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Ist für beliebige Körpererweiterungen L/K die Bedingung $\Omega^1_{L/K} = 0$ äquivalent dazu, daß L/K separabel algebraisch ist?

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien k ein Körper, $A := k[x]$, $K := k(x)$ und D die übliche Ableitung (nach x) auf A und auf K. Es seien A^D, bzw. K^D, die *Konstanten von* D, d.h. diejenigen Elemente von A, bzw. K, welche von D auf die 0 abgebildet werden. Zeigen Sie:

(a) Wenn k die Charakteristik 0 besitzt, dann ist $A^D = K^D = k$.

(b) Wenn k die Charakteristik $p > 0$ besitzt, dann ist $A^D = k[x^p]$ und $K^D = k(x^p)$.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei A ein kommutativer Ring. Es sei B eine A-Algebra, $f : B \otimes_A B \to B$ der Diagonal-Homomorphismus welcher durch $f(b \otimes b') = bb'$ definiert wird und $I := \mathrm{Ker}(f)$. Man betrachte $B \otimes_A B$ als Links-B-Modul. Damit erhält I/I^2 die Struktur eines B-Moduls. Man definiere eine Abbildung

$$d : B \to I/I^2, \quad d(b) := 1 \otimes b - b \otimes 1 \mod I^2.$$

Zeigen Sie, daß $(I/I^2, d)$ isomorph zu dem Modul der relativen Differentialformen $\Omega_{B/A}$ ist.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien K ein Körper, $D : K \to K$ eine $\mathbb{Z}$-Derivation und $C := K^D$ die Konstanten von D. Zeigen Sie;

(a) C ist ein Körper.

(b) Es sei
$$L := \{Y \in K^n \mid D(Y) = AY\},$$
wobei $D(Y)$ die komponentenweise Ableitung bezeichne und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, daß L ein C-Vektorraum der Dimension $\leq n$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie induktiv, daß Elemente in L, welche über C linear unabhängig sind, auch über K linear unabhängig sind.)