**Übungen zur Algebra II — Blatt 7, Sommersemester 05**

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

**1. Aufgabe:** (4 Punkte) Es seien $A, B$ lokale kommutative noethersche Ringe mit maximalem Ideal $m_A$ und $m_B$ (resp.), und es sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus, so daß $f^{-1}(m_B) = m_A$. Es gelte

(a) Die von $f$ induzierte Abbildung $A/m_A \to B/m_B$ ist ein Isomorphismus.

(b) Die von $f$ induzierte Abbildung $m_A \to m_B/m_B^2$ ist surjektiv.

(c) $B$ ist ein endlich erzeugter $A$-Modul.

Zeigen Sie, daß $f$ surjektiv ist.

**2. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei $A$ ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit maximalem Ideal $m_A$, Restklassenkörper $k = A/m_A$ und Quotientenkörper $K$. Wenn $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul ist und

$$\dim_k(M \otimes k) = \dim_K(M \otimes K) = r,$$

dann ist $M$ frei vom Rang $r$.

**3. Aufgabe:** (6 Punkte) Es sei $A$ ein kommutativer Ring, $f : M \to N$ ein Morphismus von $A$-Moduln und $S \subseteq A$ ein Monoid. Zeigen Sie, daß es genau einen Morphismus $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ von $S^{-1}A$-Moduln gibt mit $(S^{-1}f)(\frac{m}{1}) = \frac{f(m)}{1}$. Zeigen Sie damit, daß der Prozess der Lokalisierung mit Morphismen verträglich ist und kurze exakte Sequenzen erhält.

**4. Aufgabe:** (2 Punkte) Zeigen Sie, daß Lokalisierungen von noetherschen Moduln wieder noethersch sind.