Übungen zur Algebra II — Blatt 8, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

---

1. Aufgabe: (4 Punkte) Ein kommutativer Ring heißt *graduiert*, falls es eine Zerlegung $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ gibt, wobei die R_n Untergruppen von $(R, +)$ sind und $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$. Man zeige:

(a) R_0 ist ein Unterring von R und $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$ ist ein Ideal von R.

(b) Man nehme an, daß R_0 noethersch ist und daß R eine endlich erzeugte R_0-Algebra ist. Dann ist auch R noethersch.

(c) Wenn R noethersch ist, dann ist auch R_0 noethersch und R ist eine endlich erzeugte R_0-Algebra.

(d) Es sei R ein noetherscher Ring und I ein Ideal von A. Es sei $R(I)$ die Menge von Polynomen $f \in A[T]$ mit $f = \sum a_n T^n$ mit $a_n \in I$. Man zeige, daß $R(I)$ noethersch ist.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Man zeige:

(a) Für jedes Primideal P von R gilt: P ist P-primär in R.

(b) Ist Q ein P-primäres Ideal in R, so gibt es ein n mit $P^n \subseteq Q \subseteq P$.

3. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Es sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Man zeige, daß I genau dann primär ist, wenn die folgende Aussage erfüllt ist: Wenn für $r, s \in R$ gilt, daß $rs \in I$ aber $r \notin I$, so folgt $s \in \sqrt{I}$. (I ist dann $\sqrt{I}$-primär.)

(b) Es sei $R = \mathbb{C}[x, y]$ und $I = \langle x^2, xy \rangle$. Man bestimme die assoziierten Primideale von R/I und gebe eine Primärzerlegung von I in R an.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei R ein kommutativer Ring. Es sei $\mathrm{Spec}(R)$ die Menge aller Primideale von R (das *Spektrum von R*). Zu jedem Ideal I von R betrachte man die Menge $V(I) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$, welche aus allen Primidealen besteht, welche I enthalten.

(a) Man zeige, daß es eine Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ gibt, deren abgeschlossene Mengen gerade die Mengen $V(I)$ sind.

(b) Man zeige, daß das Spektrum eines kommutativen noetherschen Ringes R die folgende Bedingung erfüllt: Jede absteigende Kette abgeschlossener Mengen von $\mathrm{Spec}(R)$

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$$

wird schließlich stationär.