Übungen zur Algebra II — Blatt 9, Sommersemester 05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de
Abgabetermin: Freitags in der Übung

Alle Ringe seien im folgenden kommutativ.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei A ein Ganzheitsring und $B = \mathrm{Quot}(A)$. Der ganze Abschluß von A in B heißt einfach der *Abschluss* von A. A heißt *ganz abgeschlossen,* falls A mit seinem ganzen Abschluss übereinstimmt. Zeigen Sie:

(a) Jeder faktorielle Ring ist ganz abgeschlossen.

(b) Die Ringe $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ und $k[x_1, \ldots, x_n]$ (k bezeichne einen Körper) sind faktoriell, also ganz abgeschlossen.

(c) $\mathbb{Z}[i]$ ist der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[i]$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung. Zeigen Sie:

(a) Wenn B ganz über A ist, so gilt:

- Ist I ein Ideal von B und $J = A \cap I$, so ist B/I ganz über A/J.
- Ist $S \subseteq A$ ein Monoid, so ist $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$.

(b) Ist A ganz abgeschlossen in B, so ist dies auch $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien A ein ganz abgeschlossener Integritätsring, $K = \mathrm{Quot}(A)$, $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Dann sind äquivalent:

(a) α ist ganz über A.

(b) α ist algebraisch über K und das Minimalpolynom von α liegt in $A[x]$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul und $N = Q_1 \cap \ldots, Q_r$ eine unverkürzbare Primärzerlegung. Es sei P minimal in $\mathrm{Ass}_A(M/N)$, und Q_j sei P-primär. Dann ist $Q_j := i_{M,P}^{-1}(N_P)$, wobei $i_{M,P} : M \to M_P$ die kanonische Abbildung ist. Also sind die zu den minimalen $P \in \mathrm{Ass}_A(M/N)$ gehörenden Q_j eindeutig bestimmt.