Ausarbeitung zum Thema

„Der Simplex – Algorithmus:

Formulierung, Beispiele und entartete Fälle“

im Proseminar

„Analytische Geometrie“

im

WS 2007/08

bei Herrn Prof. Dr. Werner Seiler

von

Christian Gerlach

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
1.1 Problemstellung 2
2 Der Simplex – Algorithmus **4**
2.1 Satz 4
2.2 Formulierung des Simplex – Algorithmus 7
2.3 Beispiel 10
2.4 Erweitertes Beispiel 13
3 Entartete Fälle **16**
3.1 1. Fall: Lösungsmenge K nicht kompakt 16
3.2 2. Fall: mehrere optimale Ecken 16
3.3 3. Fall: mehrfache Ecken 17
4 Fazit und kurzer Ausblick **21**
4.1 Fazit 21
4.2 Kurzer Ausblick 21
5 Literaturverzeichnis **23**

1 Einführung

In dieser Ausarbeitung möchte ich meinen Vortrag vom 18.02.2008 zum Thema „Der Simplex – Algorithmus: Formulierung, Beispiele und entartete Fälle“ zusammenfassen.
Bevor ich den Simplexalgorithmus explizit formuliere, möchte ich an dieser Stelle zunächst noch einmal das Beispielproblem vor Augen führen, das in der zugrunde liegenden Lektüre[1] als Einstieg für die Lineare Optimierung und somit den Simplexalgorithmus angeführt wird.

1.1 Problemstellung

G. Fischer behandelt das Thema anhand eines Beispiels aus der Landwirtschaft mit folgender Problemstellung:
Ein Landwirt besitzt einen Stall für 10 Kühe und 20 ha Land. Pro Jahr kann er 2400 Arbeitsstunden (Ah) aufwenden. Um eine Kuh zu unterhalten benötigt er pro Jahr 0,5 ha Land, sowie 200 Ah. Der Anbau von 1 ha Weizen erfordert 100 Ah.
Durch eine Kuh erzielt er im Jahr 350,- € und 1 ha Weizen bringt ihm im gleichen Zeitraum 260,- €.
In diesem Zusammenhang soll die Frage beantwortet werden, mit wie vielen Kühen und wie viel ha Weizen sein Gewinn maximal wird?[2]

Zunächst werden die oben genannten Bedingungen in mathematische Form gebracht. Dabei entspricht x_1 der Anzahl an Kühen und x_2 der Fläche auf der Weizen angebaut wird.

(1) $x_1 \geq 0$

(2) $x_2 \geq 0$

(3) $x_1 \leq 10$ (Restriktion durch den Stall $\rightarrow$ max. 10 Kühe)

(4) $0{,}5x_1 + x_2 \leq 20$ (Restriktion durch die Anbaufläche $\rightarrow$ 20 ha Land)

(5) $200x_1 + 100x_2 \leq 2400$ (Restriktion durch die Zeit $\rightarrow$ max. 2400 Ah/Jahr)

Die Restriktionen 1) und 2) ergeben sich dabei von selbst.[1]

---

1 „*Analytische Geometrie*“, G. Fischer, 7. Auflage, Vieweg Verlag 2001 – Das von mir hier behandelte Thema umfasst dort die Kapitel 2.2.11 bis 2.3.6 (Seite 115 – 125). Ich werde mich im Verlauf dieser Ausarbeitung insbesondere in der Einführung auf Sätze, Definitionen etc. aus den vorangegangenen Abschnitten 2.0 bis 2.2.10 beziehen.

2 Vgl. Fischer 2001, Seite 92.

Zu den Restriktionen ist zusätzlich ein Kostenfunktional gegeben, mit welchem sich der Gewinn berechnen lässt:[2]

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \mapsto 350x_1 + 260x_2$$

Fischer gibt zunächst eine *geometrische Lösung*[3] des Problems an, anhand derer anschließend ein *naives Verfahren*[4] zur Lösung der Problemstellung entwickelt wird. Sowohl das *naive Verfahren* also auch geht ebenso wie das Simplexverfahren gehen davon aus, dass die Lösungsmenge eine *konvexe Menge* ist.[5]

---

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 92.
[2] Vgl. Fischer 2001, Seite 92.
[3] Vgl. Fischer 2001, Seite 93.
[4] Vgl. Fischer 2001, Seite 100 ff.
[5] Vgl. Fischer 2001, Seite 95.

2 Der Simplex – Algorithmus

In dem Buch „Analytische Geometrie“ werden die notwendigen Utensilien, wie z.B. das Austauschlemma, das Trennungslemma oder die Tableaux zur Verfügung gestellt. Dadurch kann man das *Austauschlemma*[1], das in Abschnitt 2.2.5 der zugrunde liegenden Lektüre allgemein für K – Vektorräume beschrieben wird, auf den $\mathbb{R}$ - Vektorraum $(\mathbb{R}^n)^*$ der linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^n$ verwenden.

2.1 Satz

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems

$$\varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ \dots \ , \ \varphi_m(x) + b_m = 0 \, .$$

Die Ecke $p \in K$ werde beschrieben durch

$$\varphi_1(x) + b_1 = \ \dots \ = \varphi_n(x) + b_n = 0$$

und eine zu p benachbarte Ecke q werde beschrieben durch

$$\varphi_1(x) + b_1 = \ \dots \ = \varphi_{i-1}(x) + b_{i-1} = \varphi_j(x) + b_j = \varphi_{i+1}(x) + b_{i+1} = \ \dots \ = \varphi_n(x) + b_n = 0$$

d.h. durch Austausch der i – ten Gleichung durch eine Gleichung mit dem Index
$j \in \{n + 1, \dots, m\}$.

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 107 ff.

Man betrachte dazu die Tableaux von p und q:[1]

p	φ_1	$\cdots$	↓ φ_i	$\cdots$	φ_n	Wert
φ_{n+1}	$a_{n+1,1}$	$\cdots$	$a_{n+1,i}$	$\cdots$	$a_{n+1,n}$	$\varphi_{n+1}(p) + b_{n+1}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
→ φ_j	a_{j1}		$\boxed{a_{ji}}$		a_{jn}	$\varphi_j(p) + b_j$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
φ_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mi}	$\cdots$	a_{mn}	$\varphi_m(p) + b_m$
ψ	c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_n	$\psi(p)$

q	φ_1	$\cdots$	φ_j	$\cdots$	φ_n	Wert
φ_{n+1}	$a'_{n+1,1}$	$\cdots$	$a'_{n+1,i}$	$\cdots$	$a'_{n+1,n}$	$\varphi_{n+1}(q) + b_{n+1}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
φ_i	a'_{j1}		a'_{ji}		a'_{jn}	$\varphi_j(q) + b_j$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
φ_m	$a'_{n+1,n}$	$\cdots$	a'_{mi}	$\cdots$	a'_{mn}	$\varphi_m(q) + b_m$
ψ	c'_1	$\cdots$	c'_i	$\cdots$	c'_n	$\psi(q)$

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 116.

Dann gelten für den Übergang zwischen den beiden Tableaux die folgenden Beziehungen:

(1) $a'_{ji} = (a_{ji})^{-1}$

(2) a) $a'_{j\lambda} = -a_{j\lambda} \cdot (a_{ji})^{-1}$ für $\lambda \in \{1,..., n\}, \ \lambda \neq i$

b) $\varphi_i(q) + b_i = -(\varphi_j(p) + b_j) \cdot (a_{ji})^{-1}$

(3) a) $a'_{ki} = a_{ki} \cdot (a_{ji})^{-1}$

b) $c'_i = c_i \cdot (a_{ji})^{-1}$

(4) a) $a'_{k\lambda} = a_{k\lambda} - a_{ki} \cdot a_{j\lambda} \cdot (a_{ji})^{-1}$ für $\lambda \in \{i,..., n\}, \ \lambda \neq i$

$k \in \{n+1,..., m\}, \ k \neq j$

b) $c'_\lambda = c_\lambda - c_i \cdot a_{j\lambda} \cdot (a_{ji})^{-1}$ für $\lambda \in \{1,..., n\}, \ \lambda \neq i$

c) $\varphi_k(q) + b_k = (\varphi_k(p) + b_k) - a_{ki} \cdot (\varphi_j(p) + b_j) \cdot (a_{ji})^{-1}$

für $k \in \{n+1,..., m\}, \ k \neq i$

d) $\psi(q) = \psi(p) - c_i \cdot (\varphi_j(p) + b_j) \cdot (a_{ji})^{-1}$

Die Umrechnung der Eckentableaux erfolg genau nach den Regeln des *Austauschlemmas*[1] bzw. des o.g. Satzes.[2]

[1] Vgl. Fischer, S. 107 ff
[2] Vgl. Fischer, S. 116 ff

Beweis:

Alle Gleichungen entsprechen den im *Austauschlemma* hergeleiteten. Die Gleichungen für die Wertespalte, also (2b), (4c) und (4d) bleiben noch zu zeigen.

Die Aussage (2b) ist jedoch gerade das Maß für den Abstand zwischen den Ecken p und q. Nach Definition von p und q gilt

$$\varphi_k(q) - \varphi_k(p) = a_{ki} - (\varphi_i(q) - \varphi_i(p)) = a_{ki} \cdot (\varphi_i(q) + b_i),$$

setzt man nun (2b) ein, erhält man (4c) und (4d).[1]

2.2 Formulierung des Simplex – Algorithmus

Sofern die *Lösungsmenge* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt ist und alle Ecken einfach sind*, stehen jetzt alle Hilfsmittel zur Verfügung, um eine lineare Optimierungsaufgabe lösen zu können,.

Damit man den Algorithmus beginnen kann, wird noch eine Ausgangsecke von K benötigt. Diese ergibt sich aber in den meisten praktischen Fällen direkt aus dem Ungleichungssystem, genauer gesagt aus Restriktionen der Form

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Die Ecke $0 \in \mathbb{R}^n$ ist dann eine mögliche Startecke.[2] Tritt der Fall auf, dass sich so keine Startecke ablesen lässt, so kann man mittels des *naiven Lösungsverfahrens* eine Ecke finden mit der man den Algorithmus starten kann.

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 116.
[2] Vgl. Fischer 2001, Seite 117.

Der Simplex – Algorithmus[1]

Gegeben:

- Ausgangsecke $p \in K$
- Lineares Ungleichungssystem $\varphi_i(x) + b_i$, mit $i = 1,\dots, m$
- Ein Funktional ψ
- $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

Gesucht: optimale Ecke $q \in K$

Der Algorithmus:

1.) Stelle das Tableau für die Ausgangsecke p auf

p	φ_1	$\cdots$	φ_i	$\cdots$	φ_n	Wert	χ
φ_{n+1}	$a_{n+1,1}$	$\cdots$	$a_{n+1,i}$	$\cdots$	$a_{n+1,n}$	$\varphi_{n+1}(p) + b_{n+1}$	χ_{n+1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_j	a_{j1}	$\cdots$	$\boxed{a_{ji}}$	$\cdots$	a_{jn}	$\varphi_j(p) + b_j$	χ_j
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mi}	$\cdots$	a_{mn}	$\varphi_m(p) + b_m$	χ_m
ψ	c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_n	$\psi(p)$	

2.) Bestimme den Pivot wie folgt:

a.) Kontrolliere, ob in der Wertespalte außer bei ψ keine 0 steht. Ist dies der Fall, dann ist die Ecke einfach.

b.) Wähle diejenige Spalte als Pivotspalte in der $c_i < 0$ gilt und in der mindestens ein $a_{ki} < 0$ ist. Sollte $c_i < 0$ und $a_{ki} < 0$ für mehrere Indizes i gelten, so kann man unter den entsprechenden i frei wählen.

[1] Eigene Formulierung/Darstellung in Anlehnung an Fischer 2001, Kapitel 2.

c.) Man berechne den charakteristischen Quotienten χ_j für alle diejenigen j, für die $a_{ji} < 0$ gilt. Für den char. Quotienten gilt $\chi_j = \frac{\varphi_j(p) + b_j}{a_{ji}}$. Die nächste Ecke ist dabei wieder einfach, wenn der maximale Wert des char. Quotienten nur in einer einzigen Zeile angenommen wird.

d.) Die Zeile in der der char. Quotient maximal wird, wird zur Pivotzeile gewählt.

e.) Der Eintrag a_{ji} wird zum Pivot gewählt.

3.) Tausche nun die i-te und j-te Ungleichung aus, d.h. φ_i gegen φ_j und berechne das Tableau der nächsten Ecke nach den folgenden Regeln:

a.) Ersetze den Pivot durch sein Inverses $a'_{ji} = (a_{ji})^{-1}$.

b.) Ersetze alle Einträge der Pivotspalte (außer dem Pivot selbst) durch $a'_{ki} = \frac{a_{ki}}{a_{ji}}$ für $k = n+1,..., m$ mit $k \neq j$.

c.) Ersetze alle Einträge der Pivotzeile (außer dem Pivot selbst) durch $a'_{jl} = \frac{a_{jl}}{-a_{ji}}$ für $l = 1,..., n$ mit $l \neq i$.

d.) Ersetze alle restlichen Einträge außerhalb der Pivotzeile und –spalte durch $a'_{kl} = (a_{kl} - a_{ki} \cdot \frac{a_{jl}}{a_{ji}})$ für $k = n+1,..., m$ und $l = 1,..., n$ mit $k \neq j$, $l \neq i$.

e.) Ersetze alle c_k durch $c'_k = c_k - c_i \cdot \frac{a_{jk}}{a_{ji}}$ für $k = 1,..., n$ mit $k \neq i$. Für $k = i$ gilt $c'_i = c_i \cdot (a_{ji})^{-1}$.

f.) Berechne alle $\varphi_k(q) + b_k = (\varphi_k(p) + b_k) - a_{kj} \cdot (\varphi_j(p) + b_j) \cdot (a_{ji})^{-1}$ für $k = n+1,..., m$ mit $k \neq i$. Für $k = i$ gilt $\varphi_i(q) + b_i = -(\varphi_j(p) + b_j) \cdot (a_{ji})^{-1}$.

g.) Berechne $\psi(q) = \psi(p) - c_i \cdot (\frac{\varphi_j(p) + b_j}{a_{ji}})$.

4.) Wiederhole die Schritte **2.)** und **3.)** bis die optimale Ecke gefunden ist. Dabei ist eine Ecke optimal, wenn für alle $c_k > 0$, $k = 1,..., n$ gilt.

Diesen allgemein formulierten Algorithmus wendet Fischer auf das Anfangsbeispiel an, um den maximalen Gewinn des Landwirts zu berechnen.

2.3 Beispiel [1]

Es seien nun die Restriktionen wie im Anfangsbeispiel gegeben. Zur besseren Übersicht führe ich sie noch einmal auf:

(1) $x_1 \geq 0$

(2) $x_2 \geq 0$

(3) $x_1 \leq 10$ (Restriktion durch den Stall $\rightarrow$ max. 10 Kühe)

(4) $0{,}5x_1 + x_2 \leq 20$ (Restriktion durch die Anbaufläche $\rightarrow$ 20 ha Land)

(5) $200x_1 + 100x_2 \leq 2400$ (Restriktion durch die Zeit $\rightarrow$ max. 2400 Ah/Jahr)

Damit die Restriktionen (3) bis (5) für den Algorithmus verwendet werden können, bringt man sie auf die Form von (1) und (2):

(3) $\Rightarrow -x_1 + 10 \geq 0$

(4) $\Rightarrow -x_1 - 2x_2 + 40 \geq 0$

(5) $\Rightarrow -2x_1 - x_2 + 24 \geq 0$

Außerdem sei das Funktional wie zu Beginn $\psi = -350x_1 - 260x_2$.

Man beachte dabei, dass für das Funktional gilt: ψ maximal $\Leftrightarrow -\psi$ minimal. Dies ist notwendig, da sonst nicht $c_k < 0$ für $k = 1,..., n$ gelten würde.

Wegen (1) und (2) wird mit der Ecke (0,0) und dem zugehörigen Tableau begonnen:

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 117 f.

	x_1	x_2	Wert	χ
φ_3	**-1**	0	10	-10
φ_4	-1	-2	40	-40
φ_5	-2	-1	24	-12
ψ	-350	-260	0	

Als Pivotzeile kann hier sowohl die erste als auch die zweite Spalte gewählt werden, denn in der ψ – Zeile sind beide Koeffizienten negativ. Fischer entscheidet sich für die erste Spalte und berechnet die char. Quotienten der χ – Spalte. Die Berechnung ergibt, dass die erste Zeile Pivotzeile wird (denn: -10 ist der größte der drei Werte).

Da jetzt der Eintrag $a_{11} = -1$ als Pivot gewählt wurde, tauscht man x_1 gegen φ_3. Dies ergibt das Tableau

	φ_3	x_2	Wert	χ
$\underline{x_1}$	-1	0	$\underline{10}$	–
φ_4	1	-2	30	-15
φ_5	-2	**-1**	4	-4
ψ	350	-260	-3500	

aus dem man (10,0) als Koordinaten der Ecke ablesen kann (unterstrichen). Entsprechend dem Algorithmus muss $a_{23} = -1$ als Pivot gewählt werden, denn nur in der zweiten Spalte ist der Koeffizient in der Zeile für das Funktional negativ und in der dritten Zeile in der char.

Quotient am größten. Daraus folgt, dass x_2 gegen φ_5 getauscht werden muss, um zur nächsten Ecke zu gelangen.

Der Tausch ergibt das folgende Tableau

		↓				
		φ_3	φ_5	Wert	χ	
	$\underline{x_1}$	-1	0	$\underline{10}$	-10	
→	φ_4	-3	2	30	$-\frac{22}{3}$	←
	$\underline{x_2}$	2	-1	$\underline{4}$	–	
	ψ	-170	260	-4540		
		↑				

Daraus lässt sich die Ecke (10,4) ablesen. Da nun der Koeffizient des Funktionals in der ersten Spalte wieder negativ und der char. Quotient in der zweiten Zeile am größten ist, muss noch φ_3 gegen φ_4 getauscht werden und man erhält

				↓	
		φ_4	φ_5	Wert	
→	x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	←
	φ_3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{22}{3}$	
→	x_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{56}{3}$	←
	ψ	$\frac{170}{3}$	$\frac{440}{3}$	$-\frac{17360}{3}$	
				↑	

Wie man sieht, sind beide Koeffizienten in der ψ – Zeile sind positiv und somit ist die optimale Ecke der Lösungsmenge gefunden.

Aus der ersten und dritten Zeile des Ergebnistableaus kann man nun die Koordinaten der optimalen Ecke ablesen. Die optimale Ecke liegt bei $(\frac{8}{3}, \frac{56}{3})$ und der maximalen Gewinn bei $\frac{17360}{3} \approx 5786{,}67$ Euro.

Man kann sehen, dass mit dem Algorithmus vier Tableaux aufgestellt bzw. berechnet werden mussten. Hingegen müsste für die geometrische Lösung nur ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen gelöst werden. Dies liegt schlicht an der Einfachheit des gewählten Beispiels, d.h. der Algorithmus entfaltet seine Kraft erst bei höherdimensionalen Problemen, bei denen die normale Anschauung versagt und man nur noch ein abstraktes Ungleichungssystem betrachtet. Der eigentliche Vorteil dieses Algorithmus liegt daher in der Tatsache, dass er relativ leicht zu programmieren ist, so dass er dann von Rechnern ausgeführt werden kann. Trotz dieser Tatsache betrachten wir nun noch das folgende erweiterte Beispiel.[1]

2.4 Erweitertes Beispiel [2]

Fischer geht nun wieder von dem Anfangsbeispiel des Bauernhofes aus. Jedoch nimmt er nun zusätzlich an, dass der Bauer in seinem Stall neben den Kühen noch Schweine halten kann. Das heißt im Klartext er erweitert das Beispiel vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^3$. Um das Ungleichungssystem aufzustellen, sollen die Restriktionen wie folgt aussehen:

- Anstelle einer Kuh passen 3 Schweine in den Stall.
- Ein Schwein benötigt $\frac{1}{3}$ ha Land zum Anbau von Futter.
- Ein Schwein benötigt 20 Ah pro Jahr.
- Ein Schwein bringt pro Jahr einen Gewinn von 100,- Euro

Sei nun x_3 die Anzahl der Schweine, so ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:

(1) $x_1 \geq 0$

(2) $x_2 \geq 0$

(3) $x_3 \geq 0$

(4) $x_1 + \frac{1}{3} x_3 \leq 10 \Leftrightarrow -3x_1 - x_3 + 30 \geq 0$

(Beschränkung durch den Stall)

[1] Vgl. Diskussion zum Vortrag im Proseminar am 18.02.2008.
[2] Vgl. Fischer 2001, Seite 119 ff.

(5) $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 20 \Leftrightarrow -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 120 \geq 0$

(Beschränkung durch die Landfläche)

(6) $200x_1 + 100x_2 + 20x_3 \leq 2400 \Leftrightarrow -10x_1 - 5x_2 - x_3 + 120 \geq 0$

(Beschränkung durch die Arbeitszeit)

Für das Funktional ergibt sich dann: $\psi = -350x_1 - 260x_2 - 100x_3$

Da wegen (1), (2) und (3) der Ursprung (0, 0, 0) eine Ecke der Lösungsmenge ist, kann man dort mit dem Simplex – Algorithmus beginnen. Dies ergibt dann nacheinander die folgenden Tableaux:

Ausgangsecke (0, 0, 0)

		x_1	x_2	↓ x_3	Wert	χ	
→	φ_4	-3	0	-1	30	-30	←
	φ_5	-3	-6	-2	120	-60	
	φ_6	-10	-5	-1	120	-120	
	ψ	-350	-260	-100 ↑	0		

Ecke (0, 0, 30)

		x_1	↓ x_2	φ_4	Wert	χ	
	x_3	-3	0	-1	30	–	
→	φ_5	3	-6	2	60	-10	←
	φ_6	-7	-5	1	90	-18	
	ψ	-50	-260 ↑	100	-3000		

Ecke (0, 10, 30)

	x_1	φ_5	φ_4	Wert	χ
x_3	-3	0	-1	30	-10
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	10	–
φ_6	$-\frac{19}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	40	$-\frac{80}{19}$
ψ	-180	$\frac{130}{3}$	$\frac{40}{3}$	-5600	

Optimale Ecke $p = (\frac{80}{19}, \frac{230}{19}, \frac{330}{19}) \approx (4{,}21;\ 12{,}11;\ 17{,}37)$

	φ_6	φ_5	φ_4	Wert
x_3	$\frac{6}{19}$	$-\frac{5}{19}$	$-\frac{15}{19}$	$\frac{330}{19}$
x_2	$-\frac{2}{38}$	$-\frac{7}{57}$	$-\frac{17}{57}$	$\frac{230}{19}$
x_1	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{57}$	$-\frac{4}{57}$	$\frac{80}{19}$
ψ	$\frac{360}{19}$	$\frac{1570}{57}$	$\frac{40}{57}$	$-\frac{120800}{19}$

Der Gewinn beträgt also $\frac{120800}{19} = 6357{,}89$.

Vorher lag die optimalen Ecke bei (2,67; 18,67) mit einen Gewinn von 5786,67 Euro. Durch die Aufnahme von Schweinen hat sich der Gewinn um etwa 10% erhöhen lassen und auch der Stall ist nun voll genutzt.

3 Entartete Fälle

Bei der Lösung der linearen Optimierungsaufgabe wurde zur Vereinfachung immer angenommen, dass die Lösungsmenge kompakt ist und ausschließlich einfache Ecken hat. Außerdem beschränkte man sich darauf nur einen einzigen optimalen Punkt zu bestimmen.
In der Praxis bedeutet dieses „fast nie“ eine Einschränkung. Dies schließt jedoch nicht aus, dass ein solch fast unmöglicher Fall in einem speziellen Beispiel doch einmal auftritt. Dies beunruhigt den theoretischen Mathematiker jedoch mehr als den praktischen. Daher will ich in diesem Kapitel kurz auf die Ausnahmefälle eingehen.[1]

3.1 1. Fall: Lösungsmenge K nicht kompakt [2]

Die Lösungsmenge K eines linearen Ungleichungssystems braucht nicht unbedingt beschränkt also auch nicht kompakt zu sein. Damit ist dann nicht unbedingt immer gleich klar, ob das Funktional ψ auf K ein Minimum annimmt. Verdeutlichen wir dies an folgendem

Beispiel

Ist K = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, so nimmt $\psi := x_1 + x_2$ in $0 \in K$ ein Minimum an. Dagegen ist $\psi' = -\psi$ auf K nach unten unbeschränkt.

Falls K keine Ecke besitzt versagt das Verfahren. Auf mögliche Modifikationen soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Ist eine Ecke gegeben, so kann man entscheiden, ob sie optimal ist. Wenn nicht, kann man (falls sie einfach ist) einen Suchstrahl X_+ betrachten. Ohne die Voraussetzung der Kompaktheit von K könnte nun der Fall eintreten, dass ganz X_+ in K liegt. Dies lässt sich auch daran erkennen, dass kein Koeffizient in der Pivotspalte negativ ist. Dann ist ψ auf X_+ nicht nach unten beschränkt, also kann ψ auf K kein Minimum annehmen und damit besitzt die lineare Optimierungsaufgabe keine Lösung.

3.2 2. Fall: mehrere optimale Ecken [3]

Dieser Ausnahmefall ist äußerst harmlos. Betrachte dazu folgende

Bemerkung

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems

[1] Vgl. Fischer 2001, Seite 121 ff.
[2] Vgl. Fischer 2001, Seite 121.
[3] Vgl. Fischer 2001, Seite 122.

$$\varphi_i(x) + b_i \geq 0, \text{ i} = 1, \dots, \text{m}$$

Und es existiere b := min { $\psi(x) : x \in K$ }. Die Menge

$$K' = \{x \in K : \psi(x) = b\}$$

sei Kompakt. Dann ist K' die konvexe Hülle der (endlich vielen) optimalen Ecken von K.

Beweis

K' ist die konvexe Hülle seiner Ecken $p_1, \dots, p_k$. Wegen Lemma 2.1.5 [1] sind $p_1, \dots, p_k$ auch Ecken von K. Trivialerweise ist jede optimale Ecke von K eine Ecke von K'.

Unter den obigen Voraussetzungen kann man einem Tableau einer einfachen Ecke p von K' sofort ablesen, ob es weitere optimale Ecken gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn in der ψ – Zeile mindestens ein Koeffizient gleich Null ist.

3.3 3. Fall: mehrfache Ecken [2]

Dieser Ausnahmefall ist der letzte und auch der unangenehmste Fall von allen. Dazu will ich zunächst untersuchen, unter welchen Voraussetzungen an das Tableau das übliche Verfahren zum Übergang zu einer benachbarten Ecke angewandt werden kann.

Betrachte dazu das folgende

Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$ sei das Ungleichungssystem

(1) $x_1 \geq 0$

(2) $x_2 \geq 0$

(3) $-x_2 + 3 \geq 0$

(4) $-x_1 + 2 \geq 0$

(5) $-x_1 + x_2 \geq 0$

und das zugehörige Funktional $\psi := -x_1$ gegeben.

In der Ecke (0, 0) der Lösungsmenge sind die Ungleichungen (1), (2) und (5) mit den Gleichheitszeichen erfüllt. Für diese Ecke hat man also die Auswahl zwischen drei verschiedenen Tableaux:

---

[1] Siehe S. 99, „Analytische Geometrie“, G. Fischer

[2] Vgl. Fischer 2001, Seite 122 ff.

a	x_1	x_2	Wert
φ_3	0	-1	3
φ_4	-1	0	2
φ_5	-1	1	0
ψ	-1	0	0

↑

b	x_1	x_2	Wert
φ_3	0	-1	3
φ_4	1	-1	2
φ_5	-1	1	0
ψ	1	-1	0

↑

c	x_1	x_2	Wert
φ_3	-1	-1	3
φ_4	-1	0	2
φ_5	1	1	0
ψ	-1	0	0

↑

Die Pivotspalte ist jeweils eindeutig festgelegt. Wendet man das gewohnte Verfahren an, so erhält man für die Suche nach einer besseren Ecke die folgenden Suchstrahlen:

a) $X_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$,

b) $X_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$,

c) $X_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, x_1 \geq 0\}$.

Der Strahl a) führt aus der Lösungsmenge K hinaus. Im Fall b) und c) erhält man jeweils den gleichen Strahl.

Die Begründung hierfür kann man sich geometrisch klarmachen: Im Fall a) verläuft die Ungleichung (5) in die falsche Richtung. Im Tableau äußert sich dies dadurch, dass der zu (5) gehörende Koeffizient in der Pivotspalte (in dem Fall -1) negativ ist.

Zur Vereinfachung nehme man nun für eine nicht notwendig einfache Ausgangsecke an, dass die erste Spalte Pivotspalte ist und zeigen den folgenden

Satz

Die Lösungsmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ des linearen Ungleichungssystems

$$\varphi_i(x) + b_i \geq 0, \ i = 1, \dots, m$$

sei kompakt.

Weiter seien $\varphi_1,..., \varphi_n$ linear unabhängig und es sei $p \in K$ eine Ecke mit

$$\varphi_i(p) + b_i \begin{cases} = 0, & i = 1,..., r \\ > 0, & i = r + 1,..., m \end{cases}$$

wobei $r \geq n$ gilt. Für i = 1, … , m betrachten wir die Darstellung

$$\varphi_i = a_{i1}\varphi_1 + ... + a_{in}\varphi_n .$$

Wir setzen voraus, dass gilt:

$a_{i1} \geq 0$ für i = n+1, … , r. (*)

a) Dann gibt es ein $j \in \{r + 1,..., m\}$, so dass $a_{j1} < 0$ ist.

b) Sei $j \in \{r + 1,..., m\}$ so gewählt, dass $a_{j1} < 0$ gilt und

$$\chi_j := \frac{\varphi_j(p) + b_j}{a_{j1}}$$

maximal ist. Ist dann $q \in \mathbb{R}^n$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\varphi_j(x) + b_j = \varphi_2(x) + b_2 = ... = \varphi_n + b_n = 0,$$

so ist q Ecke und [p, q] Kante von K.

Beweis

Ist p einfach, so ist r = n und wir haben die Aussage des „Normalfalles“. Im allgemeinen Fall betrachtet man wieder den Strahl

$$X_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \qquad \varphi_2(x) + b_2 = ... = \varphi_n(x) + b_n = 0\}.$$

Man zeigt, dass all seine Punkte wegen Bedingung (*) die Ungleichungen mit den Indizes n + 1, … , r erfüllen.

Sei also $x \in X_+$ und $i \in \{n + 1,..., r\}$. Dann ist

$$\varphi_i(p) = a_{i1}\varphi_1(p) + a_{i2}\varphi_2(p) + ... + a_{in}\varphi_n(p) \qquad \text{und}$$

$$\varphi_i(x) = a_{i1}\varphi_1(x) + a_{i2}\varphi_2(p) + ... + a_{in}\varphi_n(p) \qquad \text{also}$$

$$\varphi_i(x) + b_i = \varphi_i(x) - \varphi_i(p) = +a_{i1}(\varphi_1(x) - \varphi_1(p)) = a_{i1}(\varphi_1(x) + b_1) \geq 0 .$$

Um den letzten in K gelegenen Punkt des Strahls X_+ zu bestimmen, sind nur noch die Ungleichungen der Indizes r + 1, … , m zu berücksichtigen und kann dann genauso vorgehen wie im Beweis für einfache Ecken.[1]

[1] Vgl. S. 112ff „Analytische Geometrie“, G. Fischer, Vieweg-Studium, 2001

Man kann nun auch direkt im Tableau von der Ecke p ablesen, ob die Bedingung (*) von oben erfüllt ist. Dazu braucht man nur die Koeffizienten in der Pivotspalte zu betrachten, in deren Wertespalte 0 steht, von eben diesen darf keiner negativ sein.
Nun kommt man zur Kernfrage des Problems, nämlich der Frage, was man tun muss, wenn die Bedingung (*) nicht erfüllt ist. Ausgehend vom obigen Beispiel betrachte das Tableau

	x_1	x_2	Wert
φ_3	0	-1	3
φ_4	-1	0	2
φ_5	-1	1	0
ψ	-1	0	0

In diesem Tableau ist die Bedingung (*) nicht erfüllt, denn bei φ_5 steht in der Pivotspalte -1 als Koeffizient. Wählt man ihn als Pivot (also tauscht man x_1 gegen φ_5) erhält man das Tableau b) vom Anfang des Kapitels 3.3, welches die Bedingung (*) erfüllt.
Hierbei wird jedoch keine neue Ecke erreicht, daher heißt ein solcher Austauschschritt *stationär*. Es ist jedoch möglich durch endlich viele stationäre Austauschschritte ein Tableau zu finden, welches die Bedingung (*) erfüllt. Dazu verwendet man die sogenannten lexikographischen Regeln, die ausschließen, dass man aus einem schlechten Tableau nach endlich vielen stationären Austauschschritten wieder dasselbe Tableau zurückerhält. Dieses unerwünschte Phänomen nennt man Kreisen. Fischer führt jedoch an, dass dieses Phänomen in der Praxis nicht vorkommt, sondern nur in diesem speziellen dafür konstruierten Beispiel.

Eine weitere Methode um mehrfache Ecken zu umgehen, ist die *Störung der Konstanten.* Sie beruht darauf, dass eine mehrfache Ecke in mehrere einfache Ecken zerfällt, wenn man die Konstanten b_i ein klein wenig verändert. An dieser Stelle verweist Fischer auf *Dantzig, G.B. „Lineare Programmierung und Erweiterungen“ Springer, Berlin 1966* für mehr Details.

4 Fazit und kurzer Ausblick

4.1 Fazit

Wenn man den Anfang des Kapitels 2 der Begleitlektüre[1] mit dem Beispiel aus 2.3 vergleicht, kann man sehen, dass der Algorithmus hier die aufwendigere Methode von beiden ist. Dies ergibt sich aus der Einfachheit des gewählten Beispiels: Das Problem aus dem Beispiel des Bauernhofes lebt im zweidimensionalen reellen Raum (da nur Kühe und Weizen betrachtet werden) und ist durch wenige Restriktionen geometrisch sehr anschaulich. Das Aufstellen der vier nötigen Tableaux verursacht in diesem Fall deutlich mehr Aufwand als das Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen (was der geometrischen Lösung entspräche).[2]

Seine wahre Schnelligkeit entfaltet der Simplex – Algorithmus erst bei größeren Problemen. Nämlich jenen, welche geometrisch nicht mehr anschaulich sind und bei denen sehr viele Restriktionen beachtet werden müssen. Ohne das Simplexverfahren müsste man in höherdimensionalen Optimierungsaufgaben riesige Gleichungssysteme lösen. Da das Lösen so großer Gleichungssysteme einen sehr großen Aufwand bedeutet, wäre dies in der Praxis vollkommen uneffektiv, wenn nicht sogar mehr oder weniger unmöglich (zumindest in verhältnismäßiger Zeit).[3]

Ein weiterer Vorteil des Simplex – Algorithmus ist, dass die Funktionswerte in den Ecken (die im Tableau in der „Wert“ – Spalte stehen) recht einfach und ohne Kenntnis der Koordinaten der momentanen Ecke berechnet werden können. Alle Werte des nächsten Tableaus können durch das Simplexverfahren allein aus den Einträgen des momentanen Tableaus berechnet werden. Dadurch eignet sich dieses Verfahren bzw. dieser Algorithmus sehr gut, um es für einen Computer zu programmieren.[4]

4.2 Kurzer Ausblick

Wir haben nun Optimierungsaufgaben untersucht, bei denen wir es sowohl mit linearen Restriktionen als auch mit einem linearen Kostenfunktional zu tun hatten. In der Praxis sind solche Optimierungsaufgaben selten bis nie linear, so dass die lineare Optimierung meistens nur eine erste Annäherung an die wirklichen Zusammenhänge liefert.

[1] „Analytische Geometrie“, G. Fischer, Vieweg-Studium, 7. Auflage, 2001.
[2] Vgl. Diskussion zum Vortrag im Proseminar am 18.02.2008.
[3] Vgl. Diskussion zum Vortrag im Proseminar am 18.02.2008.
[4] Vgl. Diskussion zum Vortrag im Proseminar am 18.02.2008.

Für komplexere nicht – lineare Optimierungsprobleme und – Modelle werden dann Methoden der konvexen Optimierung benutzt. Bei diesen Methoden werden konvexe Funktionale auf konvexen Mengen untersucht. Wobei ein konvexes Funktional dabei wie folgt definiert ist:

Ist die Lösungsmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so heißt eine Funktion $\psi : K \to \mathbb{R}$ konvex, wenn für alle $x, y \in K$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu = 1$ die Ungleichung

$$\psi(\lambda x + \mu y) \leq \lambda\psi(x) + \mu\psi(x)$$

gilt.

Ich möchte an dieser Stelle allerdings nicht weiter darauf eingehen, da dies den Rahmen dieses kurzen Ausblicks übersteigen würde.

5 Literaturverzeichnis

- Fischer, Gerd „Analytische Geometrie“, Vieweg – Studium, Wiesbaden 2001.
- Proseminar „Analytische Geometrie“ 18. – 19. 02. 2008, Vortrag von Christian Gerlach und anschließende Diskussion.