Projektive Räume und Unterräume

Erik Slawski

Proseminar Analytische Geometrie
bei Prof. Dr. Werner Seiler und Marcus Hausdorf
Wintersemester 2007/2008
Fachbereich 17 Mathematik
Universität Kassel

Inhaltsverzeichnis

1.) Einleitung und Motivation

In der üblichen Ebene $\mathbb{R}^2$, die wir affine Ebene über den reellen Zahlen nennen und mit $A(\mathbb{R}^2)$ bezeichnen taucht folgendes Problem auf:

Sind g und h zwei verschiedene Geraden in $A(\mathbb{R}^2)$, dann können zwei verschiedene Fälle auftreten:

(1) Es gilt $g \cap h = \{P\}$, d.h. g und h schneiden sich in einem Punkt.

(2) Es gilt $g \cap h = \emptyset$, d.h. g und h sind parallel.

Man will nun diese Fallunterscheidung verhindern und erreichen, daß sich zwei verschiedene Geraden immer in einem Punkt schneiden. Dazu betrachtet man eine Klasse von parallelen Geraden als Geradenrichtung bzw. "unendlich fernen Punkt".

Formal ist dann $[g] = \{h \in A(\mathbb{R}^2) : g \parallel h\}$ eine Geradenrichtung bzw. ein "unendlich ferner Punkt".

Man kann nun die projektive Ebene einführen:
$P := A(\mathbb{R}^2) \cup \{[g] : g \in A(\mathbb{R}^2)\}$
Man betrachtet nun projektive Geraden $g \cup [g]$ in P, d.h. zu jeder Geraden aus $A(\mathbb{R}^2)$ wird der unendlich ferne Punkt $[g]$ hinzugefügt.

Dadurch hat man folgendes erreicht:
Für $G, H \in P$ mit $G = g \cup [g]$, $H = h \cup [h]$, wobei $g, h \in A(\mathbb{R}^2)$ gilt:

(1) g, h sind nicht parallel, d.h. sie schneiden sich genau in einem Punkt Q in $A(\mathbb{R}^2)$
$\Rightarrow G \cap H = \{Q\}$

(2) Es gilt $g \parallel h \Rightarrow g \cap h = \emptyset$
Aber: $G \cap H = [g]$, da $[g] = [h]$
In diesem Fall schneiden sich also die beiden Geraden G und H in dem unendlich fernen Punkt $[g]$.

Also schneiden sich beliebige Geraden in der projektiven Ebene immer.

2.) Einführung und Definition des projektiven Raumes

Definition 1
Sei V ein K-Vektorraum. Mit $P(V) := \{U \leq V : dim_k(U) = 1\}$ bezeichnet man die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von V. Man nennt $P(V)$ den zu V gehörigen projektiven Raum. Man bezeichnet die Elemente von $P(V)$ als Punkte.
Ist V endlichdimensional, so setzen wir $dim_k(P(V)) := dim_k(V) - 1$ und nennen diese Zahl die projektive Dimension. Insbesondere gilt $P(\{0\}) = \emptyset$ und $dim_k(\emptyset) = -1$.

Beispiel 2
(i) Für $V = K^{n+1}$ setzen wir $P(K^{n+1}) := P_n(K)$ und nennen diesen Raum kanonischen n-dimensionalen projektiven Raum. Hier kann man sich die Elemente des projektiven Raumes als Geraden durch den Ursprung vorstellen.

(ii) Ist $V = K[x]_{\leq n} := \{p \in K[x] : deg(p) \leq n\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n, so ist $P(K[x]_{\leq n}) = \{\langle p\rangle_K : p \in K[x]_{\leq n}, p \neq 0\}$ der projektive Raum von $K[x]_{\leq n}$.

(iii) Ist V=K^{nxn} der Vektorraum der nxn-Matrizen, so ist $P(K^{nxn})$=$\{\langle A\rangle_K : A \in K^{nxn}, A \neq 0\}$ der zugehörige projektive Raum.
Insbesondere gilt $dim_k P(K^{nxn}) = n^2 - 1$.

3.) Einführung der homogenen Koordinaten

Definition und Bemerkung
Ist V ein K-Vektorraum und $v \in V\backslash\{0\}$, so bestimmt v eindeutig eine Gerade $G_v := \{\lambda \cdot v : \lambda \in K\}$ durch 0. Damit erhält man eine kanonische Abbildung:
$V\backslash\{0\} \to P(V), v \mapsto G_v$

Zwei Vektoren $v, v' \in V\backslash\{0\}$ bestimmen genau dann diesselbe Gerade, wenn sie linear abhängig sind.
(d.h. Es gibt ein $\mu \in K$ mit $v' = \mu \cdot v$)

Ist insbesondere $V = K^{n+1}$ und $v = (x_0, .., x_n)$≠ 0, so setzen wir:

$(x_0 : x_1 : ... : x_n) := \{\lambda \cdot (x_0, .., x_n) : \lambda \in K\}$

Man nennt diese $(n+1)$-Tupel *homogene Koordinaten* eines Punktes aus $P_n(K)$.
Dabei muss mindestens ein $x_i \neq 0$ sein $(i = 0, .., n)$, da $v \neq 0$ gelten muss.

Ferner gilt:
$(x_0 : ... : x_n) = (x'_0 : ... : x'_n)$
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $\lambda \in K$ mit x$'_0 = \lambda x_0, .., x'_n = \lambda x_n$

4.) Projektive Unterräume

Definition 1

Sei $P(V)$ ein projektiver Raum. $Z \subset P(V)$ heißt projektiver Unterraum, wenn die Teilmenge $W := \bigcup_{p \in Z} p$ ein Untervektorraum von V ist.
Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist Z selbst ein projektiver Raum, nämlich $Z = P(W)$.
Man nennt $Z \subset P(W)$ eine

- projektive Gerade, wenn $dim Z = 1$,
- projektive Ebene, wenn $dim Z = 2$,
- projektive Hyperebene, wenn $dim Z = dim(P(V)) - 1$

Beispiel 2

$Z = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in P_3(K) : x_3 = x_4 = 0\}$ ist eine projektive Gerade.

5.) Projektive Räume als Abschluß affiner Räume

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, wieso die im zweiten Abschnitt definierten projektiven Räume als Abschluß affiner Räume angesehen werden können.

Zunächst betrachtet man dazu im K^{n+1} den n-dimensionalen Untervektorraum
$W := \{(x_0, ..., x_n) \in K^{n+1} : x_0 = 0\}$
Er bestimmt eine projektive Hyperebene $H := P(W) \subset P_n(K)$, die man auch in der Form $H := \{(x_0 : .. : x_n) \in P_n(K) : x_0 = 0\}$ schreiben kann.

Der K^n lässt sich in den projektiven Raum $P_n(K)$ durch die Abbildung φ kanonisch einbetten:

$\varphi : K^n \to P_n(K)$, $(x_1, .., x_n) \mapsto (1 : x_1 :, ..., : x_n)$

Jedem Punkt im K^n wird also ein projektiver Punkt bzw. eine Ursprungsgerade im K^{n+1} zugeordnet. Bei der kanonischen Einbettung wird der K^n aufgefasst als Hyperebene im K^{n+1} mit der Gleichung $x_0 = 1$.

Die kanonische Einbettung φ ist injektiv, aber nicht surjektiv, da die projektiven Punkte $(0 : x_1 :, ..., : x_n) \in H$ kein Urbild haben.

Man kann diese Punkte jedoch als unendlich ferne Punkte des K^n auffassen.

Die sieht man besonders gut im Fall $K = \mathbb{R}$:

Betrachte dazu für $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Verbindungsgeraden
$g_s := (1 : sx_1 :, ..., : sx_n) = (\frac{1}{s} : x_1 :, ..., : x_n)$ mit dem Ursprung.

Offenbar gilt $\lim_{s\to\infty} g_s = (0 : x_1 :, ..., : x_n) \in H$

$\Rightarrow$ die Punkte $(0 : x_1 :, ..., : x_n)$ der projektiven Hyperebene sind also die unendlich fernen Punkte bzw. Geradenrichtungen des K^n.

Zusammenfassung dieser Konstruktion:

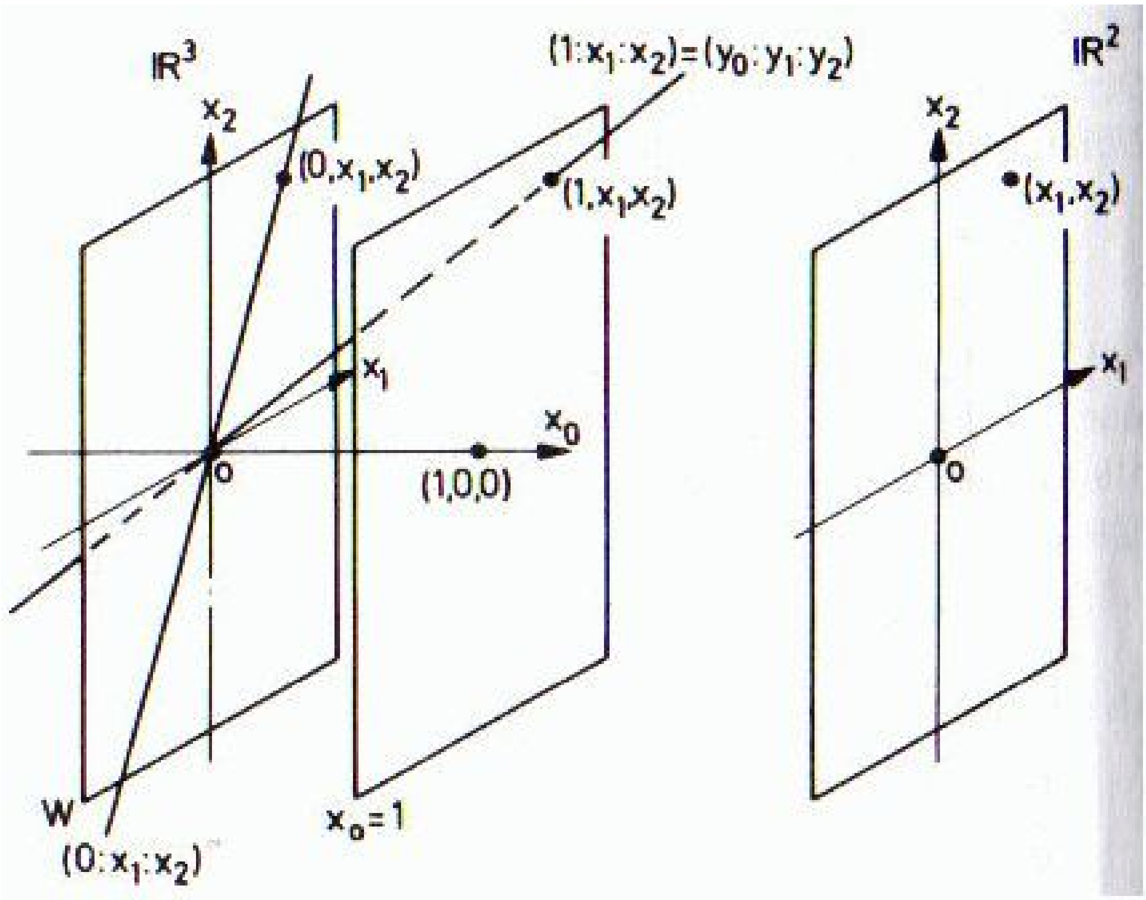
■ Man legt den K^n in den K^{n+1} als Hyperebene mit der Gleichung $x_0 = 1$ hinein.

■ Jedem Punkt aus K^n wird eine Ursprungsgerade $(1 : x_1 :, ..., : x_n)$ zugeordnet.

■ Die Punkte der unendlich fernen Hyperebene H sind die Geradenrichtungen des K^n.

■ Nun ist folgende Identifikation möglich:
$P_n(K) = K^n \cup H$

In der folgenden Grafik ist der Sachverhalt für $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ veranschaulicht:



6.) Gegenseitige Lage projektiver Unterräume

Lemma 1
Sei I eine Indexmenge und $(P(W_i))_{i\in I}$ eine Familie projektiver Unterräume eines projektiven Raumes $P(V)$ und sei $W_i \leq V$.
Dann gilt $\bigcap_{i\in I} P(W_i) = P(\bigcap_{i\in I} W_i)$, d.h. der beliebige Durchschnitt projektiver Unterräume ist wieder ein projektiver Unterraum.

Beweis: Sei $\langle p\rangle \in \bigcap_{i\in I} P(W_i) \Leftrightarrow p \in W_i$ für alle $i \in I \Leftrightarrow p \in \bigcap_{i\in I} W_i \Leftrightarrow \langle p\rangle \in P(\bigcap_{i\in I} W_i)$ q.e.d

Bemerkung 2
Die beliebige Vereinigung projektiver Unterräume ist im allgemeinen kein projektiver Unterraum.
Betrachte z.B. die projektiven Unterräume $Z_1 = \{(1:0)\} \subset P_1(\mathbb{R})$ und $Z_2 = \{(0:1)\} \subset P_1(\mathbb{R})$.

Definition 3
Sei $(Z_i)_{i\in I}$ eine Familie projektiver Unterräume eines projektiven Raumes $P(V)$ und sei $Z_i = P(W_i)$ für $W_i \leq V$. Der kleinste projektive Unterraum von $P(V)$, der die Teilmenge $\bigcup_{i\in I} Z_i \subset P(V)$ enthält, wird Verbindungsraum genannt und mit $\bigvee_{i\in I} Z_i$ bezeichnet.
Für eine endliche Indexmenge $I = \{1, .., n\}$ schreibt man: $Z_1 \vee ... \vee Z_n$

Bemerkung 4
Es gilt $\bigvee_{i\in I} Z_i = P(\sum_{i\in I} W_i)$.

Beweis: Sei $\langle p\rangle \in P(\sum_{i\in I} W_i) \Leftrightarrow p \in \sum_{i\in I} W_i \Leftrightarrow p \in \langle \bigcup_{i\in I} W_i\rangle \Leftrightarrow \langle p\rangle \in \bigvee_{i\in I} Z_i$ q.e.d

Erinnerung 5
Für den Beweis des nächsten Satzes müssen wir auf die bekannte Dimensionsfomel für endlichdimensionale Vektorräume aus der Linearen Algebra 1 zurückgreifen:
Sind W_1, W_2 Untervektorräume eines endlich erzeugten K-Vektorraumes V, dann gilt $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$

Satz 6 (Dimensionsformel für projektive Räume)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sind $Z_1, Z_2 \subset P(V)$ projektive Unterräume, dann gilt:
$dim(Z_1 \vee Z_2) = dim(Z_1) + dim(Z_2) - dim(Z_1 \cap Z_2)$

Beweis: Sei $Z_1 = P(W_1)$ und $Z_2 = P(W_2)$, dann gilt:
* $dimP(W_1) = dim(Z_1) = dim(W_1) - 1 \Leftrightarrow dim(W_1) = dim(Z_1) + 1$, analog: $dim(W_2) = dim(Z_2) + 1$ und $dim(W_1 \cap W_2) = dim(Z_1 \cap Z_2) + 1$

$\Rightarrow dim(Z_1 \vee Z_2) \overset{Bem.4}{=} dim(P(W_1 + W_2)) \overset{Def.2.1}{=} dim(W_1 + W_2) - 1 = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) - 1 \overset{*}{=} dim(Z_1) + 1 + dim(Z_2) + 1 - dim(Z_1 \cap Z_2) - 1 - 1 = dim(Z_1) + dim(Z_2) - dim(Z_1 \cap Z_2)$ q.e.d