1. Übungsblatt (24.10.2007)

1. a) Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf einer zweielementigen Menge?

   b) Wie viele verschiedene Ordnungsrelationen gibt es auf einer zweielementigen Menge? Wie viele wesentlich verschiedene (d.h. nicht isomorphe) Arten gibt es hierbei?

   c) Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf einer dreielementigen Menge? Wie viele wesentlich verschiedene (d.h. nicht isomorphe) Arten gibt es hierbei?

   d) Wie viele verschiedene Ordnungsrelationen gibt es auf einer dreielementigen Menge? Wie viele wesentlich verschiedene (d.h. nicht isomorphe) Arten gibt es hierbei?

2. Man sagt, eine Menge A ist gleichmächtig wie eine Menge B, und man schreibt dafür $A \sim B$, wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt. Zeigen Sie, daß es sich bei dieser Gleichmächtigkeitsrelation $\sim$ tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

3. Man sagt, eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ teilt eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$ (oder auch a ist Teiler von b, bzw. b ist Vielfaches von a), und man schreibt dafür $a \mid b$, wenn es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = c\,a$ gibt. Zeigen Sie, daß es sich bei der Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf der Menge $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ um eine Ordnungrelation handelt.
   Gilt dies auch noch für die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf der Menge $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$?
   Und für die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf der Menge $\mathbb{Z}$?

4. Es sei $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen und es sei an die beiden (z.B. bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen verwendeten) Landau-Symbole O und Θ erinnert: Für zwei Folgen $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ und $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ schreibt man $f = O(g)$, wenn es eine reelle Konstante $c > 0$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ stets $|f_n| \leq c|g_n|$ gilt.
   Ferner schreibt man $f = \Theta(g)$ für zwei Folgen $f, g \in \mathcal{F}$, wenn sowohl $f = O(g)$ als auch $g = O(f)$ gilt, d.h. wenn es zwei reelle Konstanten $c_2 \geq c_1 > 0$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ stets $c_1|g_n| \leq |f_n| \leq c_2|g_n|$ gilt.

   Zeigen Sie:

   a) Durch $f \asymp g$ genau dann, wenn $f = \Theta(g)$, wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{F}$ definiert.

   b) Durch $[f]_\asymp \preceq [g]_\asymp$ genau dann, wenn $f = O(g)$, wird eine Ordnungsrelation auf der Quotientenmenge $\mathcal{F}/_\asymp$ definiert.

Die Übungsblätter gibt es auch online via

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~compmath/lehre/ds2/ds2.html