2. Übungsblatt (7.11.2007)

1. Es sei $(\mathcal{A}, *)$ eine universelle Algebra mit einer assoziativen Verknüpfung $*$, es gebe in $\mathcal{A}$ ein linksneutrales Element e (d.h. mit $e * a = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$) und zu jedem $a \in \mathcal{A}$ gebe es (bzgl. e) ein linksinverses Element $b \in \mathcal{A}$ (d.h. mit $b * a = e$). Zeigen Sie der Reihe nach:
   a) Ein (bzgl. e) linksinverses Element $b \in \mathcal{A}$ zu $a \in \mathcal{A}$ ist (bzgl. e) auch rechtsinvers zu a (d.h. wenn $b * a = e$, dann auch $a * b = e$).
   b) Das linksneutrale Element $e \in \mathcal{A}$ ist auch rechtsneutral (d.h. es gilt auch $a * e = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$) und eindeutig. (Es gibt also auch genau ein neutrales Element in $\mathcal{A}$.)
   c) Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gibt es (bzgl. e) genau ein linksinverses Element $b \in \mathcal{A}$ zu a und dieses b ist sogar invers zu a. (Es gibt also auch genau ein inverses Element zu a.)

   (Anmerkung: Die obigen Voraussetzungen implizieren also, daß $(\mathcal{A}, *)$ eine Gruppe ist.)

2. Es sei M eine nichtleere Menge, es sei $\mathcal{A} = M^M := \{f : f \colon M \to M\}$ die Menge aller Abbildungen von M in M und es bezeichne $f \circ g$ die für $x \in M$ durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ definierte Verknüpfung (oder auch Komposition) zweier Abbildungen $f, g \in \mathcal{A}$. Offensichtlich ist $\circ$ assoziativ und und die Identität id_M das neutrale Element von $\mathcal{A}$.
   a) Zeigen Sie, daß es zu einer Abbildung $f \in \mathcal{A}$ genau dann eine linksinverse Abbildung $g \in \mathcal{A}$ (d.h. mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$) gibt, wenn f injektiv ist.
   b) Zeigen Sie, daß es zu einer Abbildung $f \in \mathcal{A}$ genau dann ein rechtsinverse Abbildung $h \in \mathcal{A}$ (d.h. mit $f \circ h = \mathrm{id}_M$) gibt, wenn f surjektiv ist.
   c) Zeigen Sie, daß es zu einer Abbildung $f \in \mathcal{A}$ genau dann ein inverse Abbildung $f^{-1} \in \mathcal{A}$ (d.h. mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M = f \circ f^{-1}$) gibt, wenn f bijektiv ist.

3. Es sei m ein Modul (d.h. $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$), es sei $\equiv$ die Kongruenzrelation modulo m auf $\mathbb{Z}$ (d.h. für Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt genau dann $a \equiv b$, wenn $a - b \in m\mathbb{Z} := \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$) und es sei $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\!\equiv$ die Quotientenmenge bzgl. $\equiv$ (d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen $[a]$, $a \in \mathbb{Z}$, bzgl. $\equiv$). Ist es möglich, auf $\mathbb{Z}_m$ eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ zu definieren, so daß die Surjektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, $a \mapsto [a]$, zu einem Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ auf $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ wird? Falls ja, so bestimmen Sie in den Fällen $m = 5$ und $m = 6$ jeweils die Additionstafel und die Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}_m$.

Die Übungsblätter gibt es auch online via

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~compmath/lehre/ds2/ds2.html