3. Übungsblatt (14.11.2007)

1. Es sei M eine nichtleere Menge, es sei $S_M = \{f \in M^M : f \text{ bijektiv}\}$ und es bezeichne $\circ$ die Verküpfung von Abbildungen aus S_M. Zeigen Sie, daß dann $(S_M, \circ)$ eine Gruppe ist, die sogenannte symmetrische Gruppe von M.

2. Zeigen Sie, daß für eine Gruppe $(G, *)$ die folgenden Aussagen gelten:
   a) $\forall_{g \in G}\ (g^{-1})^{-1} = g$
   b) $\forall_{g,h \in G}\ (g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$
   c) $\forall_{f,g,h \in G}\ f*g = f*h \;\rightarrow\; g = h$ und $\forall_{f,g,h \in G}\ g*f = h*f \;\rightarrow\; g = h$ (Kürzungsregel)
   d) $\forall_{g,h,x \in G}\ g*x = h \;\leftrightarrow\; x = g^{-1}*h$ und $\forall_{g,h,x \in G}\ x*g = h \;\leftrightarrow\; x = h*g^{-1}$ (eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen)

3. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und U eine nichtleere Teilmenge von G. Zeigen Sie, daß $(U, *)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, *)$ ist, wenn für $g, h \in U$ stets $g * h^{-1} \in U$ gilt.

4. Zeigen Sie, daß eine Gruppe $(G, *)$ genau dann kommutativ ist, wenn die Inversenabbildung $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, ein Homomorphismus von $(G, *)$ in sich selbst ist (genauer sogar ein Isomorphismus).

5. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und mit $g * g = e$ für alle $g \in G$. Ist $(G, *)$ dann kommutativ?

6. Gegeben sei ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{Z}$ und es sei $m \in \mathbb{N}$ ein Modul. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \bmod m$, daß auch $P(a) \equiv P(b) \bmod m$ gilt.

7. Zeigen Sie für eine Zahl $c \in \mathbb{N}$ mit der Dezimaldarstellung $c_n c_{n_1} \dots c_2 c_1 c_0$, d. h. $c = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^k$, mit Ziffern $c_k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ die folgenden drei Teilbarkeitskriterien:
   a) Die Zahl c ist genau dann durch 3 teilbar, wenn dies für ihre Ziffernquersumme $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n$ gilt.
   b) Die Zahl c ist genau dann durch 9 teilbar, wenn dies für ihre Ziffernquersumme $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n$ gilt.
   c) Die Zahl c ist genau dann durch 11 teilbar, wenn dies für ihre alternierende Ziffernquersumme $c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^{n-1} c_{n-1} + (-1)^n c_n$ gilt.

Die Übungsblätter gibt es auch online via

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~compmath/lehre/ds2/ds2.html