7. Übungsblatt (16.01.2008)

1. Zeigen Sie, daß es in einem Graphen mit mindestens zwei Knoten stets zwei Knoten mit demselben Grad gibt. (Tipp: Überlegen Sie, ob das Schubfachprinzip anwendbar ist.)

2. a) Zeigen Sie: Für $n, j \in \mathbb{N}$, $0 < j < n$, gilt $\binom{j}{2} + \binom{n-j}{2} \leq \binom{n-1}{2}$. (Wann gilt Gleichheit?)
   b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: Ein Graph mit n Knoten ist zusammenhängend, wenn seine Kantenzahl größer als $\binom{n-1}{2}$ ist.
   Zeigen Sie auch, daß die vorangehende Bedingung "scharf" ist, d.h. zeigen Sie, daß es Graphen mit n Knoten und $\binom{n-1}{2}$ Kanten gibt, die nicht zusammenhängend sind.

3. Eine Kante in einem zusammenhängenden Graphen heißt eine Brücke, wenn der Graph ohne diese Kante nicht mehr zusammenhängend ist. Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph hat keine Brücken, wenn alle seine Knoten geraden Grad haben.

4. Gibt es einen 3-regulären Graphen mit 6 Knoten, der kein Dreieck (d.h. Kreis der Länge 3) enthält? (Bei einen 3-regulärer Graphen haben alle Knoten denselben Grad 3.)

5. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, der kein Dreieck (d.h. Kreis der Länge 3) enthält. Zeigen Sie per Induktion, daß dann $|E| \leq k^2$ gilt. Zeigen Sie auch, daß diese Schranke "scharf" ist, d.h. daß es auch solche Graphen mit $|E| = k^2$ gibt.

6. a) Für welche Werte $n_1, n_2 \geq 1$ ist der vollständige bipartite Graph K_{n_1,n_2} eulersch?
   b) Für welche Werte $n_1, n_2 \geq 1$ ist K_{n_1,n_2} hamiltonsch?

7. Der n-dimensionale Hyperwürfel H^n ist wie folgt definiert: Seine Knotenmenge ist die Menge $\{0, 1\}^n$ aller bit-Folgen der Länge $n \geq 1$ und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau einer ihrer n bit-Stellen unterscheiden.
   a) Für welche Werte $n \geq 1$ ist H^n eulersch?
   b) Zeigen Sie per Induktion, daß H^n für alle $n \geq 2$ hamiltonsch ist.

Die Übungsblätter gibt es auch online via

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~compmath/lehre/ds2/ds2.html