Universität Kassel
FB 10, AG Computational Mathematics
Prof. Dr. Werner M. Seiler
Matthias Seiß

23.04.2015

Differentialtopologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass jeder k-dimensionale Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist, und dass alle linearen Abbildungen auf V glatt sind.

b) Die *stereographische Projektion* ist die Abbildung π von der punktierten Sphäre $S^2 \setminus \{N\}$ auf $\mathbb{R}^2$, wobei N der Nordpol $(0,0,1)$ ist, und für jeden Punkt $p \in S^2 \setminus \{N\}$ gilt: $\pi(p)$ ist der Schnittpunkt der Geraden durch p und N mit der xy-Ebene.
Zeigen Sie, dass π ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

glatt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = f(x-a)f(b-x)$ glatt ist, positiv auf (a,b) und die Nullfunktion auf $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ ist (Es sei $a < b$).

c) Betrachten Sie nun die Funktion

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} g dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g dx}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $h(x)$ eine glatte Funktion ist mit der Eigenschaft $h(x) = 0$ für $x < a$, $h(x) = 1$ für $x > b$ und $0 < h(x) < 1$ für $x \in (a,b)$.

d) Geben Sie eine Funktion h auf $\mathbb{R}^k$ mit der folgenden Eigenschaft an: $h(x) = 1$ für $|x| < a$, $h(x) = 0$ für $|x| > b$ und $0 < h(x) < 1$ für $a < |x| < b$ (Es sei $0 < a < b$).

Aufgabe 3

a) Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass df_x ein Isomorphismus von Tangentialräumen für jedes $x \in M$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ nicht diffeomorph sind, wenn $k \neq l$ gilt.

bitte wenden!

Aufgabe 4

Der Graph einer Abbildung $f : M \to N$ ist die Teilmenge von $M \times N$ definiert durch

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}. \tag{3}$$

a) Sei $F : M \to \mathrm{graph}(f)$ die Abbildung definiert durch $F(x) = (x, f(x))$. Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus ist, wenn f glatt ist.
Dies besagt, dass $\mathrm{graph}(f)$ eine Mannigfaltigkeit ist, wenn M das ist.

b) Sei f glatt. Zeigen Sie: $dF_x(v) = (v, df_x(v))$.

c) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $\mathrm{graph}(f)$ bei dem Punkt $(x, f(x))$ der Graph der Abbildung $df_x : T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ ist.

Die Aufgaben werden nicht eingesammelt.
Lösungswege werden am 29.04.2015 in der Übung besprochen.