Universität Kassel 06.05.2015
FB 10, AG Computational Mathematics
Prof. Dr. Werner M. Seiler
Matthias Seiß

Differentialtopologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es seien $Z \subseteq M$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $z \in Z$. Zeigen Sie, dass es ein System von lokalen Koordinaten $\{x_1, \dots, x_k\}$ in einer Umgebung $U \subset M$ von z gibt, so dass $Z \cap U$ durch die Gleichungen $x_{l+1} = 0, \dots, x_k = 0$ definiert ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ eine Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ ist.
Geben Sie zwei unabhängige Funktionen an, die das Bild global definieren. Sind Ihre Funktionen unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^3$ oder nur auf einer offenen Umgebung des Bildes?

b) Prüfen Sie nach, dass 0 der einzige kritische Wert der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ist.
Zeigen Sie: Wenn $a \cdot b > 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, so sind $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(b)$ diffeomorph.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Räume schneiden sich transversal?

a) Die xy-Ebene und die z-Axe in $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ in $\mathbb{R}^n$. (Hängt von k, l und n ab!)

Aufgabe 4

a) Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung, die transversal zu einer Untermannigfaltigkeit $Z \subseteq N$ ist. Dann ist $W := f^{-1}(Z)$ eine Untermannigfaltigkeit von M (vgl. Vorlesung).
Zeigen Sie, dass $T_x(W) = df_x^{-1}(T_{f(x)}(Z))$ ist.

b) Seien X und Z transversale Untermannigfaltigkeiten von N. Zeigen Sie, dass für $y \in X \cap Z$ folgendes gilt: $T_y(X \cap Z) = T_y(X) \cap T_y(Z)$.