Universität Kassel
FB 10, AG Computational Mathematics
Prof. Dr. Werner M. Seiler
Matthias Seiß

03.06.2015

Differentialtopologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

a) Ein *Vektorfeld* $\vec{v}$ auf einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Abbildung $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^n$, so dass $\vec{v}(x)$ immer eine Tangente an M im Punkt x ist. Zeigen Sie, dass die folgende Definition eines Vektorfelds äquivalent ist:

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ auf M ist eine glatte Abbildung $\vec{v} : M \to T(M)$ mit der Eigenschaft, dass $p \circ \vec{v} = \mathrm{id}_M$ ist. Hierbei bezeichnet $p : T(M) \to M$ die Projektion $p(x, v) = x$.

b) Ein Punkt $x \in M$ heißt *Nullstelle* des Vektorfelds $\vec{v}$, falls $\vec{v}(x) = 0$ ist. Zeigen Sie:

Ist k ungerade, so gibt es ein Vektorfeld $\vec{v}$ auf S^k, das keine Nullstellen hat.

Aufgabe 2

a) Es sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten mit Rand. Zeigen Sie:

Die Abbildung $\partial f = f\,|_{\partial M}$ bildet den Rand ∂M diffeomorph auf ∂N auf.

b) Zeigen Sie, dass das Quadrat $S = [0, 1] \times [0, 1]$ keine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

Aufgabe 3

Es seien M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $x \in \partial M$. Es sei weiter $U \xrightarrow{\phi} M$ eine lokale Parametrisierung mit $\phi(0) = x$, wobei U eine offene Untermenge der oberen Halbebene $\mathbb{H}^k$ ist. Die Abbildung $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \to T_x(M)$ ist dann ein Isomorphismus. Der *obere Halbraum* $\mathbb{H}_x(M)$ in $T_x(X)$ ist definiert durch $\mathbb{H}_x(M) := d\phi_0(\mathbb{H}^k)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}_x(M)$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Aufgabe 4

a) Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass es genau zwei Einheitsvektoren in $T_x(M)$ gibt, die senkrecht auf $T_x(\partial M)$ stehen. Zeigen Sie weiter, dass einer innerhalb von $\mathbb{H}_x(M)$ und der andere Vektor außerhalb von $\mathbb{H}_x(M)$ liegt.

Der Vektor innerhalb von $\mathbb{H}_x(M)$ heißt die *innere Einheitsnormale* zum Rand, der andere Vektor heißt die *äußere Einheitsnormale* zum Rand und wird mit $\vec{n}$ bezeichnet. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$, so kann $\vec{n}$ als eine Abbildung von ∂M auf $\mathbb{R}^n$ betrachtet werden.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{n}$ glatt ist.