Universität Kassel 08.07.2015
FB 10, AG Computational Mathematics
Prof. Dr. Werner M. Seiler
Matthias Seiß

Differentialtopologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung eine Lösung in $\mathbb{C}$ besitzt:

$$z^7 + \cos(|z|^2)(1 + 93z^4) = 0.$$

b) Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung mit M und N zwei orientierbare Mannigfaltigkeiten, $\dim M = \dim N$, M kompakt und N zusammenhängend.
Zeigen Sie: Ist $\deg(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.

Aufgabe 2

$\mathbb{H}^k$ habe die Standardorientierung von $\mathbb{R}^k$. Dadurch erhält $\partial\mathbb{H}^k$ eine Randorientierung. Auf der anderen Seite kann aber auch $\partial\mathbb{H}^k$ mit $\mathbb{R}^{k-1}$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass die Randorientierung und die Standardorientierung von $\mathbb{R}^{k-1}$ genau dann übereinstimmen, wenn k gerade ist.

Aufgabe 3

a)Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus von kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:
i) Erhält f die Orientierung, so ist $\deg(f) = 1$.
ii) Kehrt f die Orientierung um, so ist $\deg(f) = -1$.

b) Berechnen Sie den Grad der Abbildung $\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k,\ x \mapsto -x$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung genau dann homotop zur Identitätsabbildung ist, wenn k ungerade ist.

Aufgabe 4

a) Es sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ glatt und es existiere eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t)).$$

Weiter existiere für die Abbildung g eine ganze Zahl q mit $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q$.
Zeigen Sie, dass $\deg(f) = q$.

b) Es seien $f,\ g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zwei glatte Abbildungen.
Zeigen Sie: f und g sind genau dann homotop, wenn $\deg(f) = \deg(g)$ gilt.